TRAVAUX DIRIGÉS 4. APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1

1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$\begin{aligned}
 f_1 & : \mathbb{R} && \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & \quad x && \longmapsto 2x^2 \\
 f_2 & : \mathbb{R} && \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & \quad x && \longmapsto 2x - 3 \\
 f_3 & : \mathbb{R}^2 && \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 & \quad (x, y) && \longmapsto (-x, 3y + x) \\
 f_4 & : \mathbb{R}^2 && \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & \quad (x, y) && \longmapsto 3x + 4y \\
 f_5 & : \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 & \quad (x, y, z) && \longmapsto (2x + y, 1) \\
 f_6 & : \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 & \quad (x, y, z) && \longmapsto (xy + x, x) \\
 f_7 & : \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 & \quad (x, y, z) && \longmapsto (x + y - z, 2x - y + z, x + y + 2z) \\
 f_8 & : \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 & \quad (x, y, z) && \longmapsto (-x + 2y, x - y + z, z) \\
 f_9 & : \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
 & \quad (x, y, z) && \longmapsto (x + 2y, y + z, x - 2y + z, x + y^3) \\
 f_{10} & : \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 & \quad (x, y, z) && \longmapsto (x + y, 2x + 5z, 0)
 \end{aligned}$$

2. On considère l'application $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, définie par:

$$\varphi(z) = \bar{z}.$$

L'application φ est-elle linéaire lorsque $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

Même question lorsque $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

3. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$\begin{aligned}
 u_1 & : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) && \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} && \longmapsto a + d \\
 u_2 & : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) && \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\
 & \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} && \longmapsto - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
 u_3 & : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) && \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
 & \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} && \longmapsto (a + d, b + c, b - c, a - d)
 \end{aligned}$$

4. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$\begin{aligned}
 g_1 &: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\
 &\quad P \longmapsto P(0) \\
 g_2 &: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\
 &\quad P \longmapsto P'P \\
 g_3 &: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\
 &\quad P \longmapsto P'' + 2P' + P
 \end{aligned}$$

5. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? ($\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
 h_1 &: \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\
 &\quad f \longmapsto f(1) \\
 h_2 &: \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \\
 &\quad f \longmapsto f' + 2f'f \\
 h_3 &: \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \\
 &\quad f \longmapsto f - 2f' \\
 h_4 &: \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \\
 &\quad f \longmapsto 2f' + 5f^2
 \end{aligned}$$

6. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? ($\mathcal{S}$ désigne l'espace vectoriel des suites réelles et $\mathcal{E}$, l'espace vectoriel des suites réelles ayant une limite finie. On admettra qu'il s'agit de deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels).

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 &\quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto 2u_0 + 3u_2 \\
 \psi_2 &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \\
 &\quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} \\
 \psi_3 &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \\
 &\quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = u_n u_{n+1} \\
 \psi_4 &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \\
 &\quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 5 \\
 \psi_4 &: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 &\quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n
 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Déterminer $\text{Ker } f$, le noyau de l'application f .
2. Déterminer $\text{Im } f$, l'image de l'application f . Donner le rang de l'application f .
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (4x + 2y, 6x + 3y)$.

1. Déterminer $\text{Ker } f$, le noyau de l'application f .
2. Déterminer $\text{Im } f$, l'image de l'application f . Donner le rang de l'application f .
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?
4. A-t-on $\mathbb{R}^2 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)$.

1. Déterminer $\text{Ker } f$, le noyau de l'application f .
2. Déterminer le rang de l'application f . Donner $\text{Im } f$, l'image de l'application f .
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z, y - z)$.

1. Déterminer $\text{Ker } f$, le noyau de l'application f .
2. Déterminer $\text{Im } f$, l'image de l'application f . Donner le rang de l'application f .
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$; soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$ définie par

$$u(e_1) = 2e_1 - e_2, \quad u(e_2) = 3e_1 + e_2 - e_3, \quad u(e_3) = e_1 - 3e_2 + e_3.$$

1. Donner un système d'équations dans $\mathcal{B}$ de $\text{Ker } u$ puis une base de $\text{Ker } u$.
2. En déduire que u n'est ni injective, ni surjective.
3. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$. En déduire une base de $\text{Im } u$ puis un système d'équations dans $\mathcal{B}$ de $\text{Im } u$. Donner le rang de l'application u .
4. A-t-on $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = E$?

Exercice 7

1. Soit $\Psi : \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\Psi(f) = f'' + 4f' + 4f$, où $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
 - a) Déterminer $\text{Ker } \Psi$ le noyau de l'application Ψ .
 - b) En déduire que $\text{Ker } \Psi$ est de dimension finie et donner $\dim(\text{Ker } \Psi)$.
2. Soit $\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $\Phi(P) = P'' + 4P' + 4P$.
 - a) Déterminer $\text{Ker } \Phi$, le noyau de l'application Φ .
 - b) En déduire que $\text{Ker } \Phi$ est de dimension finie et donner $\dim(\text{Ker } \Phi)$.

Exercice 8

1. Reprendre l'exercice 1, pour la question 1, déterminer le noyau et l'image des applications qui sont linéaires (base, dimension et équations), le rang, puis préciser si ce sont des injections, surjections, isomorphismes, automorphismes.
2. Pour les questions 2, 3 et 4 de l'exercice 1, déterminer le noyau de celles qui sont linéaires.

Exercice 9

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il existe une application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que
 - (a) $T((1, -1)) = (2, 3)$ et $T((2, -2)) = (3, 2)$
 - (b) $T((1, -1)) = (2, 3)$ et $T((1, 1)) = (3, 2)$
 - (c) $T((1, -1)) = (2, 3)$ et $T((2, -2)) = (6, 9)$
2. Soit T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $T((1, 0)) = (1, -2)$ et $T((2, 1)) = (3, 1)$. Que vaut $T((0, 1))$?
3. Soit T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $T((1, 1)) = (1, 11)$ et $T((-1, 1)) = (-3, 1)$. Que vaut $T((5, -3))$?

Exercice 10

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

1. $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f \iff \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0\}$.
2. $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g \iff \text{Ker } g + \text{Im } f = F$.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$. (ii) $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
 (iii) $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. (iv) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

Exercice 12

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E, E)$. Montrer que :

$$\text{Ker } f = \text{Im } f \iff [f \circ f = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}(u)].$$

Exercice 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'application f définie par: $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
 $P \longmapsto P - P'$.

Vérifier que f est correctement définie puis que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer f^{-1} .

Exercice 14

On considère l'application f définie par: $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $P \longmapsto X^2P'' - XP' - 3P$.

Vérifier que f est une application linéaire. Déterminer l'image, le noyau et le rang de l'application f .