

TRAVAUX DIRIGÉS 5. APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 1

Soit $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z, t) = (x + 3y + 2z, x + y + z + t, x - t)$.

1. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g)$ la matrice de l'application g associée à ces deux bases.

2. Soient $u = (1, 3, -5, 1)$ vecteur $\mathbb{R}^4$ et la base $\mathcal{B}'_1 = (u, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$. Soient $v_1 = g(e_2), v_2 = g(e_3), v_3 = g(e_4)$ et la base $\mathcal{B}'_2 = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1}(g)$ la matrice de l'application g associée à ces deux bases.

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z, t) = (-3x - 2y + 3z, 3x + y - 3z - t, x - z - t)$.

1. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g)$ la matrice de l'application g associée à ces deux bases.

2. Soient

$$u_1 = (-1, 1, 0, -1), \quad u_2 = (1, -2, -1, 1), \quad u_3 = (-2, 3, 1, -1), \quad u_4 = (2, -1, 0, 1)$$

et

$$v_1 = (-1, 1, 0), \quad v_2 = (1, -2, -1), \quad v_3 = (2, -1, 0).$$

On admet que les deux familles suivantes, $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$, sont deux bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement:

$$\mathcal{B}'_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4), \quad \mathcal{B}'_2 = (v_1, v_2, v_3).$$

Donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1}(g)$ la matrice de l'application g associée à ces deux bases.

Exercice 3

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On définit les vecteurs

$$\begin{cases} v_1 = -4b_1 - b_2 + b_3 \\ v_2 = -2b_1 - b_2 + 5b_3 \\ v_3 = b_1 + 5b_2 - 3b_3 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(b_i) = v_i$, ($i = 1, 2, 3$). Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$.

Exercice 4

Soient $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 3), (2, 5))$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner les matrices de passage $P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}}$.
2. Etant donné l'endomorphisme T de $\mathbb{R}^2$ défini par $T(x, y) = (3y, 2x - y)$, donner les matrices dans les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 5

On considère la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. P est-elle inversible ? Le cas échéant, calculer l'inverse de P .
2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{C}$ la base telle que $P = P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}}$. Soit u l'endomorphisme ayant pour matrice:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On fixe $\lambda \in \mathbb{K}$ et on note u l'application linéaire dans E suivante:

$$u = \lambda \text{Id}_E.$$

1. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de l'application u dans la base $\mathcal{B}$.
2. On définit la base $\mathcal{B}' = (e_n, \dots, e_1)$. Donner la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u)$.

Exercice 7

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension 3 et 2 respectivement. On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ des bases de E et F respectivement. Soit u une application linéaire de E dans F et $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u)$.

On suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner $u(x)$ pour $x = e_1 + 2e_2 + e_3$.
2. A-t-on $f_2 \in \text{Im}(u)$?

Exercice 8

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et $r \in \mathbb{N}$ tels que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\text{Ker}(u)$.

1. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Vect}((u(e_1), \dots, u(e_r)))$.
2. Montrer que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$.
3. En complétant $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ à une base $\mathcal{C}$ de F , montrer que,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on donne l'application f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(v)$.
2. Déterminer le noyau de f . L'application f est-elle injective ?
3. Est-ce que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? (Justifier).
4. Déterminer l'image de f .
5. Soient $v_1 = (1, 1, 0)$; $v_2 = (0, 1, 1)$; $v_3 = (1, 0, 1)$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.
7. Déterminer M' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
8. Montrer que l'ensemble $E_\alpha = \{X = (x_1, x_2, x_3) \mid MX = \alpha X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ pour α un réel quelconque.
9. Ecrire les équations définissant E_2 (E_α défini à la question précédente avec $\alpha = 2$).
Déterminer la dimension et trouver une base de E_2 .
10. Ecrire les équations définissant E_4 (E_α défini à la question 8 avec $\alpha = 4$). Déterminer la dimension et trouver une base de E_4 .
11. Montrer que E_2 et E_4 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10

Soit:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longrightarrow (-4x + 2y + 6z, -x + y + z, -3x + y + 5z) \end{cases} \mathbb{R}^3$$

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice $\mathcal{M}$ de f relativement à la base canonique.
3. Déterminer la ou les équations cartésiennes, une base et la dimension de $\text{Ker } f$.
4. Déterminer la ou les équations cartésiennes, une base et la dimension de $\text{Im } f$. On vérifiera que la dimension de l'image et cohérente avec celle du noyau.
5. Soient $q_1 = (1, 0, 1)$, $q_2 = (2, 1, 1)$ et $q_3 = (2, 2, 1)$ et soit $\mathcal{C} = (q_1, q_2, q_3)$, montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
7. Soit (α, β, γ) les coordonnées d'un élément u de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{C}$, déterminer les coordonnées (e, f, g) de cet élément dans la base $\mathcal{B}$ (pas de calcul).
8. Soit (e, f, g) les coordonnées d'un élément u de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$, déterminer les coordonnées (α, β, γ) de cet élément dans la base $\mathcal{C}$.
9. Déterminer $Q = P^{-1}$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$.
10. Sans calcul, exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de q_1, q_2, q_3 .
11. Déterminer $f(q_1), f(q_2), f(q_3)$ puis exprimer les en fonction de q_1, q_2, q_3 .
12. Déterminer $\mathcal{M}' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
13. En déduire sans calcul $Q\mathcal{M}P$.

Exercice 11

Soit u , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer M la matrice de u associée à la base $\mathcal{B}'$.
3. Calculer M^2 et M^3 (on pourra écrire $M = xI_3 + J$ avec x un réel, I_3 la matrice identité d'ordre 3 et J une matrice carrée d'ordre 3). En déduire M^n pour n un entier non nul.

(rappel : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$.)

4. En déduire A^n .

5. On considère trois suites de nombres réels $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$, $(z_n)_{n \geq 0}$ définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n \\ y_{n+1} &= x_n + 3y_n - z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

(a) Ecrire le système matriciel que doit vérifier $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$.

(b) En utilisant ce qui a été fait précédemment, déterminer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice 12

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on se donne les deux ensembles suivants :

$$E = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$
$$F = \left\{ X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

1. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. En donner une base et leur dimension respective.
2. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
3. Soit l'application f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer le noyau de f . L'application f est-elle injective ?
5. Déterminer l'image de f . En donner une base.
6. Calculer l'image par f de la base de E que vous avez trouvée, ainsi que l'image par f de la base de F que vous avez trouvée. Conclure.
7. Calculer la matrice associée à l'application $f \circ f$.
8. Interpréter géométriquement l'application f .

Exercice 13

Soit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ (polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels) défini par

$$\begin{array}{ccc} u : \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire que u est un automorphisme.
2. Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que A est inversible et calculer son inverse A^{-1} .

3. On suppose que A^{-1} est la matrice dans la base canonique d'une application linéaire v de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer l'image par v d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Faire le lien entre la question 1 et la question 3 : que représente l'application v ?