

## Coefficients binomiaux

### Exercice 1

1. Les données suivantes ont été fournies par l'étude d'un groupe de 1050 personnes. Concernant leur emploi, leur état civil et leur niveau d'éducation, les réponses furent : 312 actifs, 470 personnes mariées, 525 bacheliers dont 42 actifs, 147 bacheliers mariés, 86 actifs mariés dont 25 bacheliers.

En notant  $A$ ,  $B$  et  $M$  les ensembles constitués respectivement des actifs, des bacheliers et des mariés, calculer  $\text{card}(A \cup B \cup M)$ , puis en déduire que cette étude est inexacte.

2. Dans l'université de Jean-Louis, il y a 800 étudiants. 300 sont des hommes, 352 ne pratiquent pas de sport, 424 sont en couple, 188 sont des hommes qui ne pratiquent pas de sport, 166 sont des hommes en couple, 208 sont en couple et ne pratiquent pas de sport, 144 sont des hommes en couple qui ne pratiquent pas de sport. Jean-Louis cherche à rencontrer une femme célibataire et sportive.

Combien y-en-a-t-il dans l'université ?

3. Sur 100 personnes pratiquant une activité sportive, les statistiques ont montré que 85 font de la course à pied, 71 font du foot et 65 font de la natation.

Peut-on être sûr qu'au moins une personne pratique ces trois activités ?

4. Un restaurant propose 4 choix d'entrées, 4 choix de plats principaux et 5 choix de desserts.

Combien peut-on confectionner de menus distincts ?

---

### Exercice 2

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
  2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
  3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
  4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?
- 

### Exercice 3

Une assemblée de 15 hommes et 12 femmes désire élire un comité de 6 membres.

1. (a) Quel est le nombre de comités qui peuvent être constitués ?  
(b) Dénombrer ceux de ces comités contenant au moins un homme et une femme.
  2. Madame A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie monsieur B.  
(a) Quel est le nombre de comités qui peuvent être constitués dans ces conditions ?  
(b) Dénombrer ceux de ces comités dont madame A ferait partie.
- 

### Exercice 4

On considère une course de chevaux avec 15 partants.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles pour la course ?

2. Le tiercé consiste à déterminer les 3 premiers chevaux de la course.  
Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre ? dans l'ordre ?
  3. Le quinté consiste à déterminer les 5 premiers chevaux de la course.  
Combien y a-t-il de quintés dans le désordre ? dans l'ordre ?
- 

### Exercice 5

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10.

1. On effectue 3 tirages successifs avec remise de la boule tirée dans l'urne.
    - (a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
    - (b) On souhaite tirer uniquement des boules numérotées par un nombre pair.  
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
    - (c) On souhaite tirer au moins une boule numérotée par un nombre premier.  
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
  2. Mêmes questions dans le cas où on effectue 3 tirages successifs sans remise de la boule tirée dans l'urne.
  3. Mêmes questions dans le cas où on effectue un tirage de 3 boules simultanément dans l'urne.
- 

### Exercice 6

Combien y a-t-il de bijection  $f$  de  $\llbracket 1, 12 \rrbracket$  dans lui-même vérifiant les conditions suivantes :

1. Aucune condition.
  2. Si  $n$  est pair, alors  $f(n)$  est pair.
  3. Si  $n$  divisible par 3, alors  $f(n)$  divisible par 3.
  4. Ces deux dernières conditions à la fois.
- 

### Exercice 7

On monte un escalier de  $n$  marches. A chaque pas, on franchit soit une marche, soit deux marches. On note  $p_n$  le nombre de façon d'arriver à la  $n$ -ième marche et on voudrait expliciter la suite  $(p_n)$ .

1. (a) Que vaut  $p_1$  et  $p_2$  ?  
(b) Déterminer une relation de récurrence liant  $p_n$ ,  $p_{n-1}$  et  $p_{n-2}$ .  
(c) En déduire une expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
  2. (a) On note  $k$  le nombre de pas de deux marches qu'on a fait en gravissant l'escalier. Quelles sont les valeurs possibles pour  $k$  ?  
(b) Calculer en fonction de  $k$  le nombre total de pas nécessaires.  
(c) Déterminer le nombre de façon de grimper l'escalier, sachant qu'on a fait  $k$  pas de deux marches.  
(d) En déduire une expression de  $p_n$  sous forme d'une somme.
- 

### Exercice 8

1. Développer les expressions suivantes :  $(1+x)^4$ ,  $(2-x)^5$ ,  $(2x-3)^3$ ,  $(x+1)^6 + (x-1)^6$ .

2. Déterminer le nombre de parties de cardinal pair dans un ensemble à 5 éléments.
3. Déterminer le nombre de parties de cardinal  $\leq 3$  dans un ensemble à 6 éléments.
4. Déterminer le nombre de parties de cardinal un multiple de 3 dans un ensemble à 7 éléments.

### Exercice 9

Calculer les sommes suivantes (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \binom{n}{k} & (2) \sum_{k=0}^{2n} (-3)^k \binom{2n}{k} & (3) \sum_{k=0}^{2n} (-3)^{n-2k} \binom{2n}{k} \\
 (4) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} & (5) \sum_{k=1}^n k 2^k \binom{n}{k} & (6) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \\
 (7) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n-1}{k} & (8) \sum_{k=0}^n \frac{k 2^k}{n} \binom{n}{k} & (9) \sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k} \\
 (10) \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} & (11) \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} & (12) \sum_{k=0}^n k(k+1) \binom{n}{k}
 \end{array}$$

### Exercice 10

Soient  $n, p, k$  trois entiers tels que  $0 \leq k \leq p \leq n$ .

1. Montrer que  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$ ,
  - (a) à l'aide de l'expression des coefficients binomiaux;
  - (b) en dénombrant de deux façons distinctes l'ensemble des couples  $(X, Y)$  de parties d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$  vérifiant :

$$X \subset Y, \quad \text{card}(X) = k, \quad \text{et} \quad \text{card}(Y) = p.$$

2. En déduire que :

$$\binom{n}{0} \times \binom{n}{p} + \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{p-1} + \dots + \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{0} = 2^p \times \binom{n}{p}.$$

### Exercice 11

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .

1. (a) Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Combien existe-t-il de couples  $(A, B)$  de parties de  $E$  vérifiant :  $A \cap B = \emptyset$  et  $\text{card}(A) = k$  ?
  - (b) En déduire le nombre de couples  $(A, B)$  de parties de  $E$  vérifiant :  $A \cap B = \emptyset$ .
2. Soit  $A \subset E$  une partie à  $p$  éléments. Quel est le nombre de parties de  $E$  qui contiennent un et un seul élément de  $A$  ?

### Exercice 12

1. Soit  $p$  un entier naturel. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. (a) Expliciter  $\binom{k}{p}$  en fonction de  $k$  lorsque  $p \in \{1, 2, 3\}$ .

(b) En déduire une expression factorisée de :

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=2}^n k(k-1), \quad \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2).$$

3. Retrouver, à l'aide de la question 2, la formule sur la somme usuelle  $\sum_{k=1}^n k^2$ .

4. (a) Déterminer  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que :  $\forall k \in \mathbb{N}, k^3 = ak(k-1)(k-2) + bk(k-1) + ck$ .

(b) En déduire, à l'aide de la question 2, la formule sur la somme usuelle  $\sum_{k=1}^n k^3$ .

### Exercice 13

1. Démontrer la formule de Vandermonde :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in \llbracket 0, n+m \rrbracket, \binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}.$$

(a) en développant  $(1+x)^{n+m}$  et  $(1+x)^n \times (1+x)^m$  à l'aide de la formule du binôme de Newton,

(b) en dénombrant de deux façons distinctes le nombre de parties d'un ensemble à  $n+m$  éléments.

2. Soit  $n$  un entier naturel.

(a) À l'aide de la formule de Vandermonde, montrer que :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .

(b) En déduire le calcul de  $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}^2$ .

### Exercice 14

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}.$$

Calculer  $S_n + T_n$  et  $S_n - T_n$ , puis donner les valeurs de  $S_n$  et  $T_n$ .