TP

Résolution approchée d'équations $f(x) = 0$

1 Représentation graphique

Pour tracer une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec Scilab, il faut contruire deux listes: une liste $L1$ de valeurs appartenant à l'intervalle $[a, b]$ et la liste $L2$ de leurs images par f.

Pour construire la liste $L1$, on construit une subdivision (uniforme) de l'intervalle $[a, b]$. Il y a deux possibilités pour cela:

- avec un pas p constant: `L1=a:p:b`,
- avec un nombre n de points fixés: `L1=linspace(a,b,n)`.

Il faut ensuite définir la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Elle peut être déjà définie (ex: `cos`, `sin`, `tan`, `exp`...). Dans le cas contraire, il faut la définir en utilisant les commandes suivantes: pour $f(x) = 2x + 1$,

```
function y=f(x)
y=2*x+1
endfunction
```

Scilab permet d'appliquer directement une fonction à une liste ou un tableau. Pour construire la liste $L2$, il suffit donc d'appliquer la fonction f à la liste $L1$: `L2=f(L1)`.

Après avoir construit les listes $L1$ et $L2$, on utilise la commande `plot(L1,L2)` qui trace les segments reliant les points d'abscisses les éléments de $L1$ et d'ordonnées les éléments de $L2$.

Remarque. Le résultat obtenu est une courbe "approchée" de la courbe représentative de f: en effet, entre deux points, on remplace la courbe par un segment.

Exercice 1 On considère la fonction $f : x \in [1, 4] \mapsto x^2 - 2$.

1. (a) Tracer la courbe représentative de f en subdivisant l'intervalle $[1, 4]$ avec un pas égal à 1.
   (b) Est-ce que la courbe obtenue est satisfaisante? Pourquoi?
2. Tracer la courbe représentative de f en subdivisant l'intervalle $[1, 4]$ en 50 points (pour effacer la courbe précédente, on utilisera la commande `clf`).

On constate sur la figure obtenue que la fonction f s'annule et change de signe: elle admet un zero, $\sqrt{2}$, sur l'intervalle $[1, 4]$.

On donne dans la suite deux méthodes numériques, la méthode de la dichotomie et la méthode de Newton, qui permettent d'obtenir une valeur approchée d'un zero d'une fonction.

2 Recherche d'une valeur approchée d'un zero d'une fonction

On considère toujours une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et on suppose qu'elle s'annule en une seule et unique valeur $\alpha \in]a, b[$ et change de signe.

2.1 Méthode de la dichotomie

La première méthode est basée sur le principe de dichotomie. Comme f s'annule et change de signe, on a en particulier $f(a)f(b) < 0$.

Le principe. On considère $c = \frac{a+b}{2}$ le milieu du segment $[a, b]$. Alors deux cas sont possibles:

- soit $f(a)f(c) < 0$: alors $f(a)$ et $f(c)$ sont de signe opposé. Comme f est continue, f doit s'annuler sur $[a, c]$ et donc $\alpha \in [a, c]$.
- soit $f(c)f(b) < 0$: alors $f(c)$ et $f(b)$ sont de signe opposé et de la même façon, $\alpha \in [c, b]$.

On recommence alors le raisonnement précédent avec l'intervalle contenant α obtenu.
On construit ainsi une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ contenant α: Pour cela, on définit les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ , \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & si\ f(a_n)f(c_{n+1}) \leq 0 \\ c_{n+1} & sinon \end{cases} \ , \quad b_{n+1} = \begin{cases} c_{n+1} & si\ f(a_n)f(c_{n+1}) \leq 0 \\ b_n & sinon \end{cases}$$

On peut montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et que $\lim\limits_{+\infty} a_n = \lim\limits_{+\infty} b_n = \alpha$.

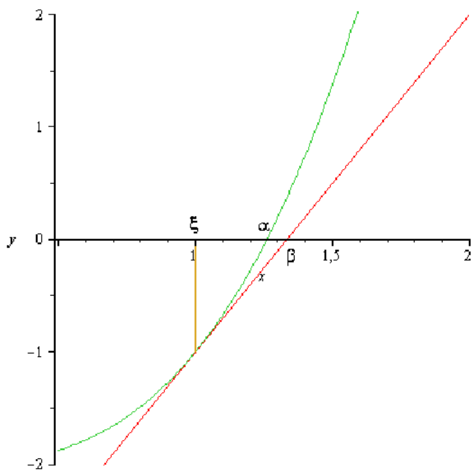
Exercice 2 On considère la fonction $f : x \in [1, 4] \mapsto x^2 - 2$ introduite à la partie 1.

1. Calculer dans ce cas a_i et b_i pour $i = 0, 1, 2$.
2. Écrire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, renvoie la valeur de a_n et de b_n.
3. Écrire une procédure qui construit les termes des suites (a_n) et (b_n) tant que $|b_n - a_n| \geq \varepsilon$, puis renvoie l'approximation de $\sqrt{2}$ à au plus ε près (ε étant une marge d'erreur entrée par l'utilisateur).
On a ainsi construit une méthode numérique pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ε près.
4. Modifier la procédure précédente pour pouvoir calculer le nombre d'étapes nécessaires pour avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec 11 décimales.

2.2 Méthode de Newton

On suppose de plus ici que f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur $[a, b]$. Soit ξ une valeur approchée grossière de α.

Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. α étant l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, l'idée est de remplacer $\mathcal{C}_f$ par sa tangente en ξ. Cette tangente rencontre l'axe Ox en un point d'abscisse β; en général β est une meilleure approximation de α que ξ.



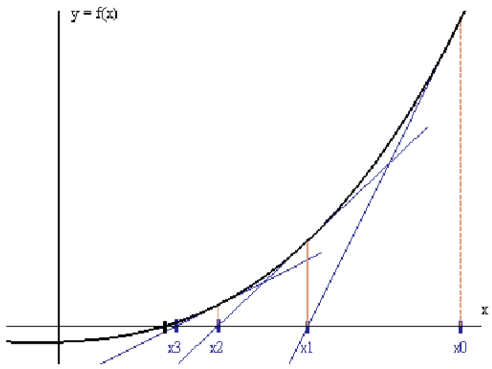
Exercice 3 On considère toujours la fonction $f : x \in [1, 4] \mapsto x^2 - 2$.

1. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $\xi = 3$ et en $\xi = 2$.
2. En déduire β dans chacun des deux cas. Quelle valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtient-on pour $\xi = 3$? Pour $\xi = 2$?
3. Tracer sur une même figure $\mathcal{C}_f$ et ces deux tangentes au point d'abscisse 3 et au point d'abscisse 2.

L'algorithme de Newton consiste à itérer ce raisonnement. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $x_0 = \xi$, $x_1 = \beta$, puis pour tout n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Graphiquement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite comme suit:



On peut alors montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le zero α de la fonction f.

Exercice 4

1. Montrer que la suite obtenue pour la fonction $f : x \in [1,4] \mapsto x^2 - 2$ par l'algorithme de Newton est définie par $x_0 \in [1,4]$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$
Dans la suite, on prend $x_0 = 3$.

2. Écrire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, renvoie la valeur de x_n.

3. (a) Construire les listes suivantes:
$$\begin{aligned} L1 &= [x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3] \\ L2 &= [0, f(x_0), 0, f(x_1), 0, f(x_2), 0] \end{aligned}$$
(b) Exécuter dans la console les commandes suivantes:
```
L3=linspace(1,4,50)
L4=f(L3)
plot(L1,L2,L3,L4)
```
On obtient ainsi une construction graphique des premiers termes de la suite (x_n).

4. Écrire une procédure qui calcul par la méthode de Newton une approximation de $\sqrt{2}$ en prenant $x_0 = 3$ et avec la condition d'arrêt: $\mid x_n - \sqrt{2} \mid \leq \varepsilon$, ε étant une marge d'erreur entrée par l'utilisateur.

5. Modifier cette procédure pour pouvoir calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir une erreur inférieure à 10^{-11}. Comparer avec le résultat obtenu pour la méthode de la dichotomie.

6. Après avoir consulté l'aide Scilab sur les fonctions `tic()` et `toc()`, comparer le temps d'exécution de chaque méthode (dichotomie et Newton) pour le calcul d'une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-11}.