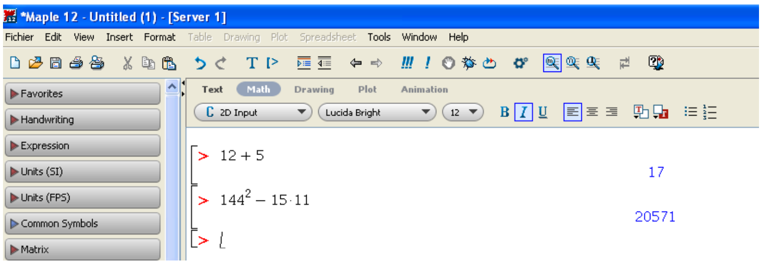
TP1

Maple: premiers calculs et premières applications

1 Maple: un logiciel de calcul formel

Le logiciel **Maple** est un système de calcul formel. Alors que la plupart des logiciels de mathématiques utilisent des valeurs numériques pour leurs calculs, Maple manipule des valeurs symboliques et est ainsi capable d'obtenir des solutions exactes à de nombreux problèmes mathématiques.

Il fonctionne comme un système interactif en interprétant les commandes au fur et à mesure qu'elles sont entrées sur la feuille de travail *(Worksheet)*:



1.1 Premiers calculs

Pour exécuter des calculs sous Maple, on veillera à respecter une certaine syntaxe: ils seront toujours précédés du symbole `>` et seront validés par la touche **Entrée**.

Si l'on souhaite exécuter plusieurs calculs consécutifs, on peut les entrer à la suite à condition de séparer les instructions par le symbole `;`

> `120-13; 10*5; 11+16;`

$$107$$
$$50$$
$$27$$

Par contre, si on ne souhaite pas afficher des calculs intermédiaires trop volumineux, on pourra remplacer le symbole `;` par le symbole `:`

> `11*6;` $12/2^8$`:  15+18;`

$$66$$
$$33$$

Enfin, le symbole `%` sera très utile puisqu'il rappelle le dernier résultat calculé, qu'il ait été affiché ou non:

> 12^3

$$1728$$

> `%/4`

$$432$$

De même, les symboles `%%` et `%%%` feront référence à l'avant-dernier résultat et à l'antépénultième.

1.2 Des calculs formels

Maple permet également d'exécuter des calculs symboliques au moyen de commandes spécifiques. Le plus souvent, ces commandes seront entrées sous la forme d'une fonction dont les arguments seront entre parenthèses.

On peut par exemple calculer la racine carrée d'un nombre:

> `sqrt(256/18)`

$$\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

ou bien résoudre une équation:

> `solve(ln(x)=1,x)`

$$e$$

ou bien calculer une somme formelle $\sum_{k=1}^{n} k$:

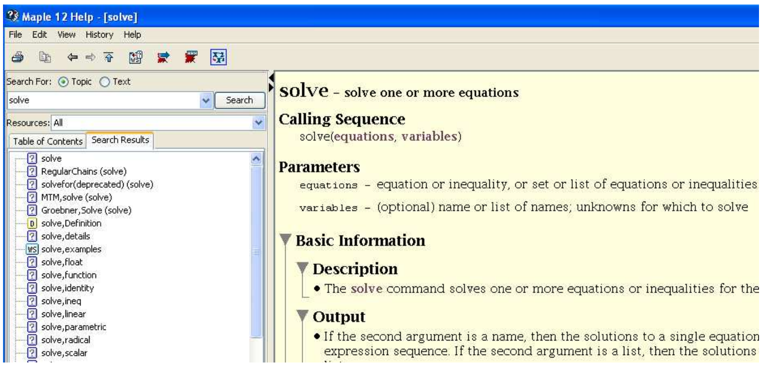
> `sum(k,k=1..n); factor(%);`

$$\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

Lorsqu'on cherche à utiliser une fonction spécifique, il ne faudra pas hésiter à consulter l'aide en ligne proposée par Maple:

- soit en cliquant sur **Help** et en faisant une recherche *(Search For Topic)*;
- soit plus rapidement -et c'est ce que l'on fera le plus souvent- en observant les exemples donnés par l'utilisation du symbole `?` avant la fonction:

  > `?solve`



2 Les nombres: premiers objets Maple

Nombres, formules algébriques, fonctions... Maple est capable de manipuler différents objets dont le type sera précisé par la commande `whattype`:

> `whattype(12)`

$$integer$$

2.1 Les nombres entiers

Sous Maple, ils sont du type *integer* pour lequel on peut trouver de nombreuses fonctions de calcul arithmétique:

Soient a, b, n, k des entiers,

Fonction Maple	Description
`ifactor(a)`	donne la décomposition en facteurs premiers de a
`isprime(a)`	teste la primalité de a
`igcd(a,b)`	détermine le PGCD de a et b
`ilcm(a,b)`	détermine le PPCM de a et b
`iquo(a,b)`	donne le quotient dans la division euclidienne de a par b
`irem(a,b)`	donne le reste dans la division euclidienne de a par b
`n!`	calcule factorielle n
`binomial(n,k)`	calcule le coefficient binomial $\binom{n}{k}$

2.2 Les nombres rationnels

Sous Maple, ils sont représentés par le type *fraction*. Dans les calculs, la simplification et la réduction au même dénominateur sont automatiques:

> `256/108; 12+17/8;`

$$\frac{64}{27}$$
$$\frac{113}{8}$$

2.3 Les nombres réels

Sous Maple, ils sont représentés par les nombres à virgule flottante du type *float*.

On trouvera la plupart des opérateurs classiques, ainsi que la majorité des fonctions usuelles:

> `3*2*sqrt(2)`

$$6\sqrt{2}$$

Cependant, Maple utilise le calcul formel. Si on souhaite obtenir une valeur approchée, on utilisera la commande `evalf`:

> `sqrt(2)`

$$\sqrt{2}$$

> `evalf(%)`

$$1.414213562$$

On peut modifier le nombre de chiffres significatifs donnés par la commande `evalf` (10 par défaut):

> `evalf(Pi); evalf(Pi,50);`

$$3.141592654$$
$$3.1415926535897932384626433832795028841971693993751$$

3 Les fonctions mathématiques

3.1 Fonction ou expression

Dans le langage Maple, nous retrouverons les principales fonctions mathématiques.

Fonction Maple	Description
`sin(x),cos(x),tan(x),` `arcsin(x),arccos(x),arctan(x)`	fonctions trigonométriques
`sinh(x),cosh(x),tanh(x),` `arcsinh(x),arccosh(x),arctanh(x)`	fonctions trigonométriques hyperboliques
`ln(x)`	logarithme népérien
`exp(x)`	exponentielle de x
`sqrt(x)`	racine carrée de x
`floor(x)`	partie entière de x
`ceil(x)`	entier immédiatement supérieur à x
`abs(x)`	valeur absolue de x

On peut aussi définir de nouvelles fonctions en procédant de deux façons via le symbole d'affectation `:=`

- sous la forme d'une *expression*:

  > `e:=(2*x^2-2)/(x+1)`

$$e := \frac{2x^2-2}{x+1}$$

- sous la forme d'un mécanisme algébrique, plus proche de la définition classique d'une *fonction*:

  > `f:=x->3*cos(x)+1`

$$f := x \rightarrow 3\cos(x)+1$$

Pour finir, à la fin d'un exercice, on n'oubliera pas de libérer le nom des fonctions ou expressions créées grâce aux symboles `''`:
> `e:='e'`

$$e := e$$

ou plus radicalement en réinitialisant toutes les variables définies sur la feuille de travail:
> `restart`

3.2 Etude d'une fonction mathématique

Limites
Pour calculer la limite d'une fonction, on utilise la commande `limit` avec une expression:

- si la fonction f a été définie comme une expression,
  > `f:=sin(x)/x:  limit(f,x=0);`

$$1$$

- si la fonction a été définie comme une fonction classique,
  > `f:=x->x*exp(-x):  limit(f(x),x=infinity);`

$$0$$

Pour la limite à gauche ou la limite à droite, on sera parfois amené à préciser le calcul de la limite:
> `limit(tan(x),x=Pi/2)`

$$undefined$$

> `limit(tan(x),x=Pi/2,left); limit(tan(x),x=Pi/2,right);`

$$\infty$$
$$-\infty$$

Dérivées
Pour dériver une fonction mathématique, on peut encore une fois procéder de deux façons, avec la commande `diff` ou la commande `D`:

- si la fonction f a été définie comme une expression,
  > `e:=x^6-6*x^3+4:  diff(e,x);`

$$6x^5 - 18x^2$$

- si la fonction a été définie comme une fonction classique,
  > `f:=x->2*tan(x):  D(f);`

$$x \to 2 + 2\tan^2(x)$$

Enfin, si par exemple on souhaite itérer le procédé et obtenir la dérivée troisième, on écrira simplement:
> `diff(e,x$3); (D@@3)(f);`

$$120x^3 - 36$$
$$x \to 4(1 + \tan(x)^2)^2 + 8\tan(x)^2(1 + \tan(x)^2)$$

Evaluation
Pour évaluer une fonction en un point, on procède de la façon la plus simple qu'il soit:
> `f:=x->2*arctan(x):  f(1);`

$$\frac{1}{2}\pi$$

Par contre, si la fonction a été définie comme une expression, on utilisera les commandes `eval` ou `subs`.
> `e:=(cos(x))^3:  eval(e,x=Pi);`

$$-1$$

Cependant, on remarquera qu'avec cette dernière commande, le résultat n'est pas calculé automatiquement, mais il faut forcer le logiciel:

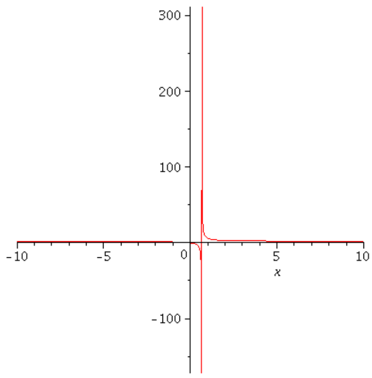
> `subs(x=Pi,e); evalf(%);`

$$\cos(\pi)^3$$
$$-1$$

Représentation graphique

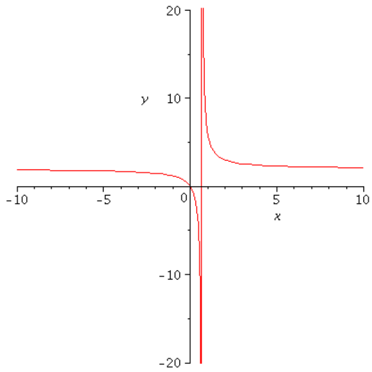
Pour représenter une fonction, on utilise la commande `plot` qui autorise de multiples options. D'ailleurs, on prendra soin de l'utiliser avec une expression:

> `e := 6*x/(3*x-2):  plot(e,x=-10..10);`



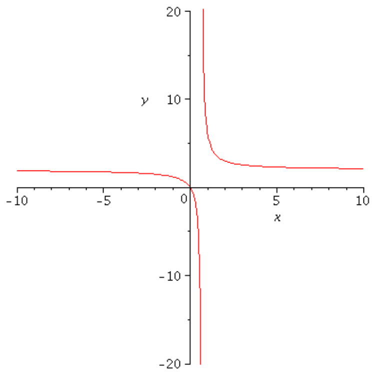
L'affichage est rarement satisfaisant; pour réduire ici l'intervalle des ordonnées, on ajustera la fenêtre du graphique:

> `plot(e,x=-10..10,y=-20..20)`



On remarque alors une droite verticale. En effet, Maple trace la courbe représentative point par point en les reliant par des segments, il ne s'agit donc pas d'une asymptote mais bien d'une erreur de tracé. Pour corriger ce tracé, on précisera à Maple que la fonction est discontinue:

> `plot(e,x=-10..10,y=-20..20,discont=true)`



Pour conclure, si Maple permet aisément de manipuler des fonctions ou des expressions par des syntaxes différentes, il est toutefois conseillé de préférer les expressions aux fonctions. On réservera donc l'utilisation des fonctions à des cas bien particuliers; par exemple lorsqu'une fonction doit être appelée dans un programme.

Exercice 1 Calculer les expressions suivantes, en simplifiant éventuellement le résultat par la commande `simplify` (consulter l'aide en ligne):

$$\frac{16\times 7^3-2\sqrt{2}}{4-\frac{10}{3}}\ ,\ \frac{1}{2}\ln(\frac{2\sqrt{2}}{5})\ ,\ \cos^2(x)+\sin^2(x)\ ,\ \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Exercice 2 Donner une valeur approchée du nombre e avec 25 chiffres significatifs.

Exercice 3 Calculer les sommes formelles suivantes, en factorisant éventuellement le résultat par la commande `factor` (consulter l'aide en ligne):

$$\sum_{k=0}^{n} k\ ,\ \sum_{k=0}^{n} k^2\ ,\ \sum_{k=0}^{n} k^3\ ,\ \sum_{k=0}^{n} k^4$$

Exercice 4 En utilisant Maple, retrouver ces limites classiques:

$$\frac{\ln^5(n)}{n^3}\ ,\ \frac{e^n}{n^5}\ ,\ \frac{n!}{n^n}\ ,\ \frac{3n^2+1}{-5n^2+6n+6}\ ,\ n\ln(1+\frac{1}{n})$$

Exercice 5 On cherche à étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{tan(2x)}{x}$.

1. Déterminer à la main le domaine de définition de f qu'on notera D_f.
2. On restreint alors l'étude à $D_f \cap [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
   (a) En utilisant Maple, calculer les limites aux bornes de ce domaine.
   (b) Tracer la courbe représentative de f pour $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ (on précisera la discontinuité de f).

Dans cet exercice, on constate que f admet une limite finie en 0 même si elle n'y est pas définie; on peut alors la ***prolonger par continuité*** *et ainsi construire une nouvelle fonction $\overline{f}$ définie par:*

$$\overline{f} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{tan(2x)}{x},\ x\in D_f \\ 2,\ x=0 \end{cases}$$

Exercice 6 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = arctan(x)$, et on construit:

$$g : x\in\mathbb{R} \mapsto f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f"(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

1. Ecrire les lignes de commande qui nous permettront de définir f, puis g.
2. Tracer dans un même graphique ces deux fonctions grâce à la commande: `plot([f,g],x=-3..3,y=-2..2)`.

Dans cet exercice, on constate que g est une bonne ***approximation de la fonction*** *f au voisinage de 0.*

Exercice 7 En informatique, on sera souvent amené à rencontrer des fonctions **booléennes** qui renvoient deux résultats: `true` ou `false`.
Une façon de construire de telles fonctions est d'utiliser la commande `evalb` (consulter l'aide en ligne).

1. Construire la fonction booléenne $positif$ qui à x donne `true` si $x \geq 0$, `false` sinon.
2. Construire la fonction booléenne $div2$ qui à x donne `true` si x est divisible par 2, `false` sinon.
3. Construire la fonction booléenne $div23$ qui à x donne `true` si x est divisible par 2 <u>et</u> divisible par 3, `false` sinon.