TP 11

Méthode de Monte-Carlo

Compétences attendues.

✓ Mettre en oeuvre la méthode de Monte-Carlo pour estimer une probabilité, la valeur d'une intégrale, ...

Liste des commandes `Python` exigibles aux concours.

- Dans la librairie `numpy` :
  - Fonctions et constantes usuelles : `np.cos`, `np.sqrt`, `np.abs`, `np.pi`
  - Création de vecteurs : `np.linspace`
  - Opération sur les matrices : `np.sum`, `np.min`, `np.max`, `np.mean`, `np.std`
- Dans la librairie `numpy.random` : `rd.random`, `rd.exponential`, `rd.normal`, `rd.binomial`, `rd.geometric`
- Dans la librairie `matplotlib.pyplot` : `plt.plot`, `plt.hist`, `plt.show`

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Introduction

On appelle communément **méthode de Monte-Carlo** toute méthode visant à estimer une quantité numérique, difficile à calculer explicitement, à l'aide de procédés probabilistes qui eux sont plus faciles à mettre en oeuvre (mais avec un risque, bien que faible, que la valeur retournée ne soit pas bonne). Les applications sont variées, comme par exemple :

- le calcul d'aires ou de volumes ;
- l'estimation du risque d'une décision financière ;
- en physique nucléaire...

Nous présentons ici le principe de cette méthode, et des exemples d'applications.

1 Principe

1.1 Calcul numérique d'une espérance

On dispose d'une quantité θ difficile à calculer directement, mais que l'on sait écrire comme l'espérance d'une variable aléatoire X. La méthode de Monte-Carlo consiste à simuler un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. de la loi de X. Les deux résultats suivants permettent alors d'obtenir une estimation de $E(X) = \theta$:

- La **loi faible des grands nombres** assure que $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est un estimateur bon estimateur de θ.
- Le **théorème limite central** assure que $\left[\overline{X_n} - t_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + t_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance $1-\alpha$, en notant t_α le réel vérifiant $\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et σ l'écart-type de X.

Méthode.
Pour obtenir une estimation numérique de θ, on procèdera ainsi :

- on exprime θ comme l'espérance d'une variable aléatoire X : $\theta = E(X)$;
- on réalise un échantillon i.i.d. de la loi de X de taille n avec n grand ($n = 1000$ par exemple) ;
- on renvoie la moyenne de l'échantillon obtenu (à l'aide de la commande `np.mean`).

1.2 Calcul numérique d'une probabilité

Une probabilité $p = P(A)$ peut être considérée comme l'espérance d'une variable de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, avec

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La méthode de Monte-Carlo s'applique donc également dans ce cas pour obtenir une estimation de la probabilité d'un l'évènement.

Méthode.
Pour obtenir une estimation numérique de p, on procèdera ainsi :

- on identifie l'épreuve de Bernoulli associée à la probabilité $p = P(A)$;
- on réalise n fois l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante avec n grand ;
- on compte le nombre c de succès dans cette succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes ;
- on renvoie la fréquence de réussite $\dfrac{c}{n}$ de l'épreuve de Bernoulli.

2 Applications

Dans toute la suite, on suppose avoir exécuté les commandes suivantes afin d'importer les librairies qui nous seront nécessaires :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.special as sp # pour la fonction de rép de la loi N(0,1)
```

2.1 Calcul d'intégrales

Exercice 1 (★★)

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$, et soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

1. (a) En utilisant la loi faible des grands nombres, montrer que :

$$S_n \xrightarrow{P} \int_0^1 g(x)dx.$$

(b) On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx.$$

Compléter le programme suivant afin qu'il retourne une valeur approchée de I.

```
def g(x) :
    return( ..... )

n = 1000
S = 0
for k in range(n):
    u = .....
    S = S + .....
print( ..... )
```

Essayer ce programme avec différentes valeurs de n et en faisant plusieurs essais à chaque fois.

(c) Comparer les valeurs obtenues à la question précédentes avec celle donnée par le code suivant :

```
from scipy.integrate import quad
res, err = quad(g,0,1)
print("Résultat de l'intégrale :", res)
```

2. Estimer la valeur des intégrales suivantes à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^4}dx \qquad K = \int_{-2}^{4} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2 (★★)

En utilisant le même principe que pour les intégrales, estimer la valeur des sommes suivantes à l'aide de la méthode de Monte-Carlo :

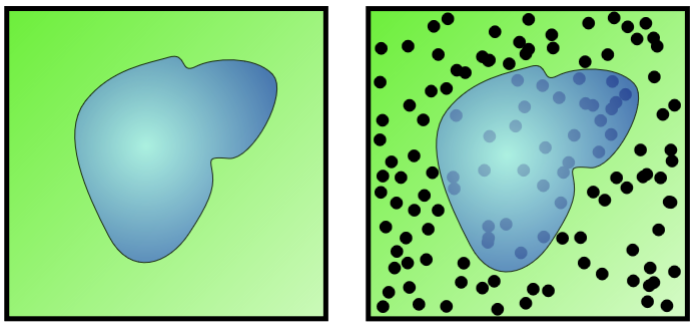
$$(1)\ \sum_{k=0}^{10} \frac{\binom{10}{k}}{\sqrt{1+k^4}} \qquad (2)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 2^k}.$$

On pensera au théorème de transfert pour une variable suivant respectivement la loi $\mathcal{B}(10,1/2)$ et la loi $\mathcal{G}(1/2)$.

2.2 Calcul d'aires

Il est également possible d'utiliser des raisonnements probabilistes pour estimer des aires.

Considérons par exemple un terrain carré dont la longueur des côtés, et donc l'aire $\mathscr{A}_{\text{terrain}}$, sont connues. Au sein de cette zone se trouve un lac dont la superficie est inconnue. Pour trouver l'aire du lac $\mathscr{A}_{\text{lac}}$, on demande à une armée de tirer N coups de canon de manière aléatoire sur cette zone.



La probabilité p qu'un boulet soit tombé dans le lac est égale à :

$$p = \frac{\mathscr{A}_{\text{lac}}}{\mathscr{A}_{\text{terrain}}}.$$

Pour estimer la superficie du lac, il suffit de compter le nombre n de boulets qui sont restés sur le terrain. En effet pour N grand, on a par le théorème d'or de Bernoulli :

$$p \approx \frac{N-n}{N} \quad \text{et donc} \quad \mathscr{A}_{\text{lac}} \approx \frac{N-n}{N} \times \mathscr{A}_{\text{terrain}}.$$

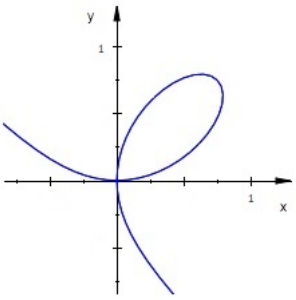
Exercice 3 (★)

Considérons la courbe ci-dessous (appelée folium de Descartes), dont on cherche à calculer une valeur approchée de l'aire formée par la boucle. On admet que l'intérieur de cette boucle est l'ensemble :

$$\mathscr{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3 + y^3 \leq \frac{3xy}{2}\}.$$

Compléter le programme suivant afin qu'il retourne une valeur approchée de l'aire de $\mathscr{B}$.

```
n = 10000
X = rd.random(n)
Y = .....
S = 0
for i in range(n) :
    if ..... :
        S = S + 1
print( ..... )
```



Folium de Descartes.

Exercice 4 (★★ - Calcul d'une valeur approchée de π)

Soit $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x,y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Représenter $\mathscr{D}$. Quelle est son aire ?
2. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables i.i.d. suivant la loi $\mathcal{U}([0,1])$. On note T_i la variable qui vaut 1 si le point (X_i, Y_i) appartient à $\mathscr{D}$, et 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de T_i.
   (b) On pose $\overline{T_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$. Montrer que $4\overline{T_n}$ converge en probabilité vers π.

3. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de π.
4. (a) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de π, au niveau de risque $\alpha = 0.05$, dont les bornes dépendent de $\overline{T_n}$.
   (b) Quelle valeur de n faut-il choisir pour obtenir une approximation de π à $\varepsilon = 0.01$ près, au niveau de risque $\alpha = 0.05$?

2.3 Calcul de la fonction de répartition d'une variable aléatoire

La méthode de Monte-Carlo avait déjà été utilisée au TP 9 (sans la nommer ainsi) pour tracer la fonction de répartition empirique G_X d'une variable aléatoire X. Rappelons-en le principe :

- on génère un échantillon observé `E` distribué suivant la loi X ;
- on discrétise l'intervalle $[\min(\texttt{E}), \max(\texttt{E})]$ à l'aide de la commande

  `u = np.linspace(np.min(E), np.max(E), 100)` ;
- pour chaque élément `u[k]` de `u`, on détermine la fréquence des modalités inférieures ou égales à `u[k]` dans l'échantillon `E`, qu'on stocke dans la k-ème composante d'un vecteur `v` ;
- on trace la ligne brisée d'abscisses données par `u` et d'ordonnées par `v`

La valeur stockée dans `v[k]` donne une estimation de $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Cette méthode permet de représenter la courbe représentative de la fonction de répartition F_X de n'importe quelle variable aléatoire X, même dans les cas où il aurait été bien délicat d'obtenir une expression explicite de F_X.

Exercice 5 (★★ - Fonction de répartition empirique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$)

1. Écrire une fonction `phi_empirique` qui, à un réel x entré par l'utilisateur, renvoie une estimation de $\Phi(x)$ par la méthode de Monte-Carlo.
2. On rappelle que la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est accessible dans la librairie `scipy.special` à l'aide de la commande `sp.ndtr`. Comparer les résultats obtenus à l'aide de la fonction `phi_empirique` avec ceux renvoyés par la commande `sp.ndtr`.

Exercice 6 (★★)

Tracer la fonction de répartition empirique de $Z = XY$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ sont indépendantes.

2.4 Comparaison de différents estimateurs ponctuels

Exercice 7 (★★)

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi mère $\mathcal{E}(\lambda)$. Nous disposons des deux estimateurs de $\theta = \dfrac{1}{\lambda}$:

- la moyenne empirique $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- l'écart type empirique $S_n = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2}$.

On souhaite comparer ces deux estimateurs. Prenons pour commencer $\lambda = 1$ et $n = 100$.

1. On considère les instructions suivantes :

```
lbd = 1 ; theta = 1/lbd ; n = 100 ; m = 1000
E = rd.exponential(1, [n, m])
S = np.std(E, 0) #calcule l'écart type par colonne
bS = np.mean(S) - theta
rS = np.std(S)**2 + (np.mean(S)-theta)**2
print(bS, rS)
```

Que contiennent les variables `S`, `bS` et `rS` ?

2. Procéder de même avec $\overline{X_n}$ comme estimateur de θ.
3. Recommencer avec d'autres valeurs de λ et de n. Quel estimateur privilégieriez vous ?
4. On souhaite maintenant comparer ces deux estimateurs à l'aide de leur histogramme des fréquences. Écrire pour cela un programme qui :
   - simule $m = 10000$ n-échantillons de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$;
   - calcule, pour chaque échantillon observé, l'estimation correspondante obtenue à l'aide de chacun des estimateurs $\overline{X_n}$ et S_n ;
   - trace l'histogramme des 10000 estimations obtenues avec chacun des estimateurs.

     On rappelle pour cela que la commande `plt.hist(x, 50, density='True', edgecolor='k')` trace l'histogramme des fréquences de la série statistique `x`, en répartissant ses éléments en 50 classes équiréparties entre la plus petite et la plus grande valeur de `x`.

     On pourra également utiliser les commandes `plt.subplot(1, 2, 1)` et `plt.subplot(1, 2, 2)` pour tracer les histogrammes sur la même fenêtre graphique l'un à côté de l'autre.

   Comparer les deux histogrammes. Recommencer pour d'autres valeurs de λ. Quel semble être le meilleur estimateur ?

2.5 Calcul du niveau de confiance réel d'un intervalle de confiance

Afin de déterminer des intervalles de confiance, nous avons besoin d'inverser la fonction Φ, notamment pour déterminer le réel $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$. Nous utiliserons à cet effet la commande `sp.ndtri`.
Par exemple, si l'on souhaite déterminer le nombre x tel que $\Phi(x) = 0.75$, on entre `sp.ndtri(0.75)`.

Exercice 8 (★ - Des valeurs classiques)

Avec les notations habituelles, déterminer les valeurs de t_α pour $\alpha = 0.05$ et $\alpha = 0.01$.

Exercice 9 (★★ - Intervalle de confiance de l'espérance d'une loi normale)

Nous avons montré en TD que si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables i.i.d. suivant la loi normale $\mathcal{N}(\theta, 1)$, alors $\left[\overline{X_n} - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

1. **Étendue de l'intervalle de confiance.**
   (a) Écrire une fonction `def etendue(n,alpha):` qui prend en paramètres un entier n et un réel $\alpha \in]0, 1[$, et renvoie l'étendue de l'intervalle de confiance de θ correspondant.
   (b) Essayer ce programme pour $\alpha = 0.05$ en faisant varier n. Puis à n fixé, étudier l'étendue de l'intervalle pour $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.001$ et $\alpha = 0.0001$. Que constate-t-on ?
2. **Niveau de confiance réel.**
   Prenons dans la suite $\alpha = 0.05$ et $n = 1000$. On souhaite estimer le niveau de confiance réel de l'intervalle de confiance par la méthode de Monte-Carlo.
   (a) Qu'effectue le code suivant :

```
theta = rd.exponential(1/1)
n = 1000
m = 10000
t = sp.ndtri(0.975)
E = rd.normal(theta, 1, [n, m])
Xbar = np.mean(E, 0) #calcule la moyenne par colonne
c = 0
for k in range(m):
    if np.abs(Xbar[k]-theta)<t/np.sqrt(n):
```

```
10          c = c+1
11  print("theta :",theta) ;
12  print("Estimation du niveau de conf de l'IdC :", c/m)
```

(b) Exécuter plusieurs fois ce code. Est-ce conforme à ce que vous vous attendiez ?