

Sommes doubles

Exercice 1 Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \qquad (2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) \qquad (3) \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} \qquad (4) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 2 1. On considère la procédure suivante :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for i=1:n do
    for j=1:n do
        if i>j then
            S=S+j
        else
            S=S+i
        end
    end
end
disp(S)
```

- (a) Entrer dans l'éditeur de Scilab cette procédure. Tester pour différentes valeurs de n . A quoi correspond la valeur de S donnée en sortie ?
- (b) Exprimer S en fonction des trois sommes $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$, $\sum_{1 \leq i \leq n} i$ et $\sum_{1 \leq j < i \leq n} j$.
- (c) En déduire une expression de S en fonction de n .
2. On s'intéresse maintenant à la somme $T_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.
- Construire une procédure qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule T_n .
3. Pour finir, on considère la somme $U_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$.
- (a) Construire une procédure qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule U_n .
- (b) Calculer U_n "à la main" et vérifier avec les résultats obtenus avec Scilab.

Exercice 3 Soit $q \neq 1$. Le but de cet exercice est d'obtenir une formule pour la somme $\sum_{j=1}^n jq^j$.

1. Montrer que $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q^j = \sum_{j=1}^n jq^j$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^n jq^j$.