TP13

Résolution approchée d'équations $f(x) = 0$

Considérons une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** et supposons que f **s'annule en une seule et unique valeur** $\alpha \in]a, b[$ et **change de signe**. On ne peut pas forcément calculer explicitement α et on doit parfois utiliser des méthodes de calcul approché pour avoir une bonne estimation de la valeur de α.

Nous présentons ici deux méthodes numériques, la **méthode de la dichotomie** et la **méthode de Newton**, qui permettent d'obtenir une valeur approchée de α.

1 Méthode de la dichotomie

La première méthode est basée sur le principe de dichotomie. Comme f s'annule et change de signe, on a en particulier $f(a)f(b) < 0$.

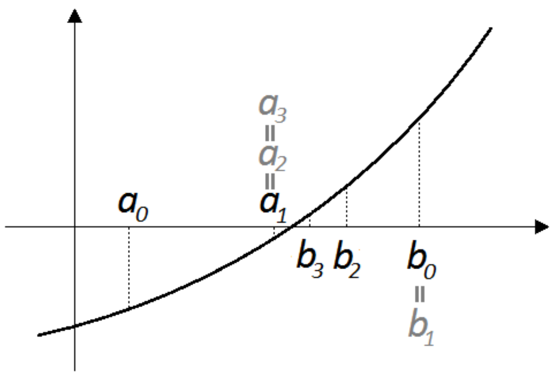
Le principe. On considère $m = \dfrac{a+b}{2}$ le milieu du segment $[a, b]$. Alors deux cas sont possibles :

- soit $f(a)f(m) \leq 0$: alors $f(a)$ et $f(m)$ sont de signe opposé. Comme f est continue, f doit s'annuler sur $[a, m]$ et donc $\alpha \in [a, m]$.
- soit $f(m)f(b) \leq 0$: alors $f(m)$ et $f(b)$ sont de signe opposé et de la même façon, $\alpha \in [m, b]$.

On recommence alors le raisonnement précédent avec l'intervalle obtenu contenant α.

On construit une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ contenant α : Pour cela, on définit trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et

- si $f(a_n)f(m_{n+1}) \leq 0$, alors $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = m_{n+1} \end{cases}$
- si $f(m_{n+1})f(b_n) \leq 0$, alors $\begin{cases} a_{n+1} = m_{n+1} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$



On a alors le théorème suivant :

Théorème 1 (Méthode de la dichotomie)

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et elles convergent vers l'unique zéro α de f sur $]a, b[$.

Exercice 1 On considère la fonction $f : x \in [1, 4] \mapsto x^2 - 2$.

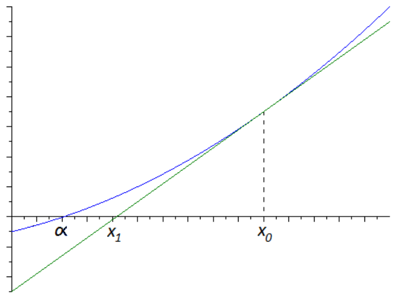
1. Tracer la fonction f sur l'intervalle $[1, 4]$ avec Scilab.
   On constate que f s'annule et change de signe sur l'intervalle $[1, 4]$.
2. Calculer dans ce cas a_i et b_i pour $i = 0, 1, 2$.
3. Écrire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule et affiche les valeurs de a_n et de b_n.
4. Écrire une procédure qui calcule les termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tant que $|b_n - a_n| \geq \varepsilon$, puis affiche l'approximation de $\sqrt{2}$ à au plus ε près (ε étant une marge d'erreur entrée par l'utilisateur).
5. Modifier la procédure précédente pour pouvoir calculer le nombre d'étapes nécessaires pour avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec 11 décimales.

Exercice 2 Nous allons démontrer dans cet exercice le Théorème 1.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad f(a_n)f(b_n) \leq 0.$$
2. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite ℓ.
3. En passant à la limite dans l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, montrer que $f(\ell) = 0$ et conclure.

2 Méthode de Newton

On suppose de plus dans cette partie que f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur $[a, b]$. Soit x_0 une valeur approchée grossière de α.

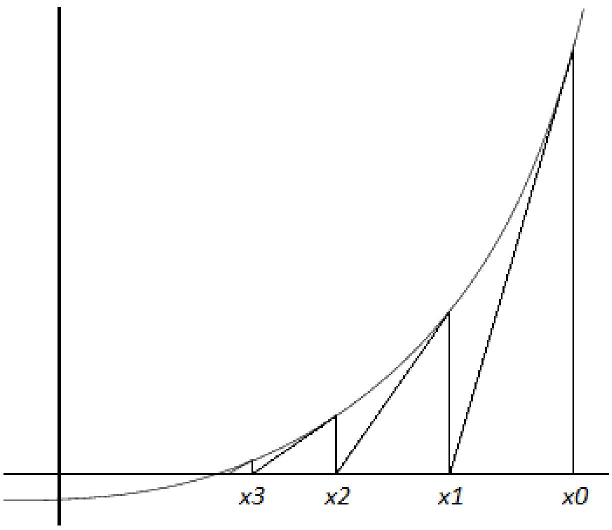


Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. α étant l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, l'idée est de remplacer $\mathcal{C}_f$ par sa tangente en x_0. Cette tangente rencontre l'axe Ox en un point d'abscisse x_1; en général x_1 est une meilleure approximation de α que x_0.

Exercice 3 On considère toujours la fonction $f : x \in [1, 4] \mapsto x^2 - 2$.

1. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x_0 = 3$ et en $x_0 = 2$.
2. En déduire x_1 dans chacun des deux cas. Quelle valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtient-on pour $x_0 = 3$? Pour $x_0 = 2$?

L'algorithme de Newton consiste à itérer ce raisonnement. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
Graphiquement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite comme sur la figure suivante :



On a alors la propriété suivante :

Propriété 2 (Méthode de Newton)

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique zéro α de la fonction f sur $]a, b[$.

Exercice 4

1. Montrer que la suite obtenue pour la fonction $f : x \in [1,4] \mapsto x^2 - 2$ par l'algorithme de Newton est définie par $x_0 \in [1,4]$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$
Dans la suite, on prend $x_0 = 3$.
2. Écrire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule et affiche la valeur de x_n.
3. Écrire une procédure qui calcule et affiche une approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton avec la condition d'arrêt $\mid x_n - \sqrt{2} \mid \leq \varepsilon$, ε étant une marge d'erreur entrée par l'utilisateur.
4. Modifier cette procédure pour pouvoir calculer le nombre d'étapes nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-11}. Comparer avec le résultat obtenu pour la méthode de la dichotomie.