TP13

Algèbre linéaire en dimension finie

Dans ce TP, nous allons voir comment Maple nous permet de résoudre des problèmes classiques d'algèbre linéaire.

Pour ce faire, nous chargerons le package `linalg` présentant les commandes indispensables à ce genre d'exercices:

> `with(linalg)`

BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, (...) wronskian

On pourra éventuellement lui préférer le package ***`LinearAlgebra`*** *disponible dans des versions plus récentes; on adaptera alors les commandes.*

1 Travail sur les vecteurs

1.1 Représentation d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel dont (e_j) est une base, alors pour tout $X \in E$, $X = \sum_j x_j e_j$.

(Cas d'un vecteur) On peut remarquer que le vecteur X est entièrement défini par ses coordonnées et ainsi, pour le représenter dans un espace de dimension n, on le considèrera simplement comme la liste de ses coordonnées:

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

(Cas d'une famille de vecteurs) Par contre, si on souhaite représenter une famille F de p vecteurs $X_1, \dots, X_p$, on construira un tableau[1] à p colonnes où chacune d'elles sera constituée des coordonnées d'un seul vecteur:

$$F = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} X_1 & \;X_2 & \;\dots & \;X_p \end{matrix} \end{array}$$

Concrètement

- Sous Maple, pour définir le vecteur $X(1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$, on tapera simplement:

  > `X:=vector([1,0,-1])`

  $$X := [1\;0\;-1]$$

  Malheureusement, si on souhaite afficher les coordonnées du vecteur, un simple appel ne suffira pas. Il faudra utiliser la commande `evalm`:

  > `X;evalm(X);`

  $$X$$
  $$[1\;0\;-1]$$

- Pour définir la famille des vecteurs $Y(-1, 0, 1)$ et $Z(1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, on construira le tableau associé de la façon suivante à l'aide des commandes `matrix` et `transpose`:

  > `Y:=vector([-1,0,1]);Z:=vector([1,1,1]); F:=transpose(matrix([Y,Z]));`

  $$Y := [-1\;0\;1]$$
  $$Z := [1\;1\;1]$$
  $$F := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Si on oublie la commande ***`transpose`****, on aura un tableau à p lignes présentant les vecteurs ligne par ligne; ce n'est pas bien grave mais dans le cadre du cours d'algèbre linéaire, on fera le choix d'une disposition des vecteurs par colonnes.*

[1] Ce tableau définit en fait la **matrice** des vecteurs $(X_1, \dots, X_p)$ dans la base de E fixée.

1.2 Indépendance linéaire

Pour savoir si une famille de vecteurs (X, Y, Z) est libre ou non, il suffit de calculer le rang de cette famille par la commande `rank`:

```
> F:=transpose(matrix([X,Y,Z])): rank(F);
```

$$2$$

Par conséquent, le sous-espace vectoriel engendré par la famille (X, Y, Z) est de dimension 2 et donc ces trois vecteurs sont liés.

Cependant, si on souhaite plutôt extraire une base de l'espace engendré par cette famille, le rang ne suffit plus et on devra se ramener à une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs pour trouver des relations de dépendance linéaire:

$$aX + bY + cZ = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système linéaire sous Maple, on commence par définir les équations sous la forme d'une séquence:

```
> seq(a*X[k]+b*Y[k]+c*Z[k]=0,k=1..3)
```

$$a - b + c = 0, c = 0, -a + b + c = 0$$

Puis, on résout ce système grâce à la commande `solve`:

```
> solve({%},{a,b,c})
```

$$\{a = b, b = b, c = 0\}$$

Par conséquent, avec $b = 1$, on a la relation de dépendance $X + Y = 0 \Leftrightarrow X = -Y$.
Ainsi, $Vect(X, Y, Z) = Vect(X, Z)$ et finalement les vecteurs X, Z n'étant pas colinéaires, ils constituent la base cherchée.

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^4$, on note F le sous-espace vectoriel engendré par $U(1, 0, 2, 3)$, $V(7, 4, -2, -1)$, $X(5, 2, 4, 7)$ et $Y(3, 2, 0, 1)$.

1. Définir ces vecteurs, puis en extraire une base de F.
2. Pour vérifier votre réponse, construire le tableau associé à la base extraite et calculer son rang.

2 Travail sur les applications linéaires

2.1 Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels, on note (e_j) une base de E et on considère u une application linéaire de E dans F. Alors pour tout $X \in E$, $u(X) = u(\sum_j x_j e_j) = \sum_j x_j u(e_j)$.

On peut remarquer que l'application linéaire u est entièrement définie par la donnée des vecteurs $u(e_j)$ et ainsi, pour la représenter on construira un tableau[2] à p colonnes où chacune d'elles sera constituée des coordonnées dans F de $u(e_j)$, c'est à dire le tableau associé aux vecteurs $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$:

$$U = \begin{bmatrix} * & * & \ldots & * \\ * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & & * \end{bmatrix}$$

$$u(e_1) \quad \ldots \quad u(e_p)$$

[2] Ce tableau définit en fait la **matrice** de l'application linéaire u dans les bases de E et F fixées.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère u l'endomorphisme de E tel que

$$u : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x - 2y + z, -y + 2z)$$

1. (a) Définir u sous Maple, puis calculer $u(1, 0, 0)$. On définira alors $U1$ le vecteur ayant pour coordonnées l'image obtenue.
   (b) Même question avec $u(0, 1, 0)$ et $u(0, 0, 1)$ qu'on notera $U2$ et $U3$.
2. En déduire alors U la représentation matricielle de l'application linéaire u.

2.2 Calcul de l'image d'un vecteur

Avec les notations précédentes, si on note U la représentation matricielle associée à l'application linéaire u et X un vecteur de E, alors $u(X)$ s'obtient simplement par le produit[3] des représentations associées:

$$u(X) = U \times_{mat} X$$

Sous Maple, si on reprend l'application u définie dans l'exercice 2, alors l'image du vecteur $Z(5, 5, 5)$ par u s'obtient grâce à la commande `multiply`:

```
> Z:=vector([5,5,5]):  multiply(U,Z);
```

$$[15\ \ -10\ 5]$$

2.3 Noyau et image d'une application linéaire

Une fois encore, Maple nous permet à partir de sa représentation matricielle, d'obtenir rapidement les vecteurs qui engendrent noyau et image d'une application linéaire; il suffira simplement d'entrer les commandes `nullspace` pour le noyau et `colspace` pour l'image:

```
> nullspace(U)
```

$$\{[-3\ 2\ 1]\}$$

```
> colspace(U)
```

$$\{[0\ 1\ 1], [1\ 0\ 1]\}$$

Exercices d'applications

Exercice 3

1. Soient $A(1, 1, -1)$, $B(-1, 1, 1)$ et $C(1, -1, 1)$. Montrer que cette famille de vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit u l'application linéaire définie par $u : (x, y, z) \mapsto (-y - z, -2x - y - 2z, x + y + 2z)$.
   On définit le rang de u par la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $(u(e_j))$, où (e_j) désigne une base de $\mathbb{R}^3$.
   Calculer le rang de u dans la base canonique, puis dans la base (A, B, C).

   On retiendra ainsi que le rang d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 4 On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice associée dans la base canonique est:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Soit $X(x, y, z, t)$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \circ \ldots \circ f(X) = 0$ (n compositions).
   On dit que f est un endomorphisme nilpotent.
2. On pose $A(1, 0, 1, 1)$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = Vect(A, f(A), f \circ f(A), f \circ f \circ f(A))$.

[3] Il ne s'agit pas d'un produit usuel; on parle de produit matriciel.

Exercice 5 Soit M la matrice de $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que, dans la base canonique:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $Ker(f)$, on notera $E1$ un vecteur qui engendre cette droite vectorielle.
2. Déterminer $E2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(E2) = E2$.
3. Déterminer $E3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(E3) = 2E3$.
4. Montrer finalement que les vecteurs (E_j) constituent une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice de f dans cette base.

   Ces endomorphismes qui admettent une base dans laquelle leur matrice est diagonale, sont dits diagonalisables. Malheureusement, vous verrez l'an prochain que tous ne le sont pas...

Exercice 6 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, \frac{z}{2} - \frac{y}{2})$$

1. On munit l'espace de sa base canonique. Déterminer M la représentation matricielle associée à f dans cette base.
2. Déterminer son noyau et son image. Vérifier qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $X(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f \circ f(X)$.