TP15

TP test

Prénom...**Nom**...

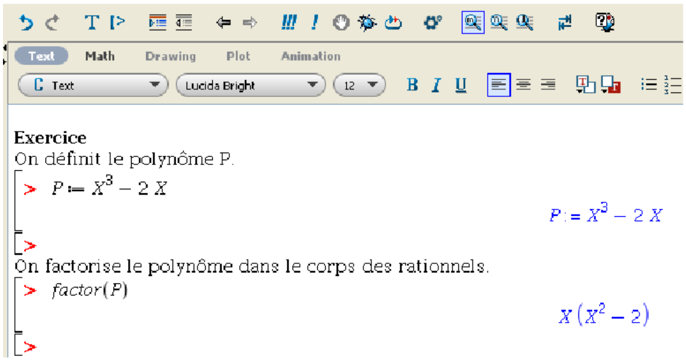
Feuille de travail

A chaque séance de TP, nous avons appris à utiliser Maple au travers de nombreuses commandes. Pour appeler celles-ci, il suffisait de taper ces fonctions dans le mode mathématique nécessitant le fameux **prompt** >:

> `A:=X^2-3*X+2:  factor(A);`

$$(X-1)(X-2)$$

Il existe un autre mode: le mode texte. Il nous permet d'ajouter du texte dans la feuille de travail, afin d'expliquer le travail en cours; on passe alors d'un mode à l'autre grâce aux icônes $\boxed{\text{T}}$ et $\boxed{[>}$.



Exercices

Sur une nouvelle feuille de travail, indiquer vos nom et prénom. Rédiger alors vos réponses aux exercices suivants, puis enregistrer votre fichier sous:

prenomnom.mw ou **prenomnom.mws**

Quelques conseils
On indiquera clairement les différents exercices traités et on prendra soin de leur résolution. Si un exercice vous résiste, n'hésitez pas à présenter vos idées, la procédure que vous souhaitez construire... Enfin, n'oubliez pas d'enregistrer régulièrement votre travail!

Exercice 1 On considère la subdivision de $[a,b]$ en posant $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ avec $\forall\ k \in \{1,\ldots,n\}$, $a_k = a + kh$ et $h = \frac{b-a}{n}$. Le but de cette exercice est d'approcher une intégrale par la méthode de Simpson. Pour cela on décide de remplacer la fonction f par un polynôme de degré 2 sur chacun des intervalles $[a_{k-1}, a_k]$ prenant les mêmes valeurs que f aux points a_{k-1}, $\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\right)$ et a_k.

1. Étant donnés deux réels u et v de l'intervalle $[a,b]$, déterminer à l'aide de la commande `solve` les réels A, B et C tels que la fonction $p : x \to Ax^2 + Bx + C$ vérifie le système d'équations:

$$\begin{cases} p(u) &= f(u), \\ p\left(\frac{u+v}{2}\right) &= f\left(\frac{u+v}{2}\right), \\ p(v) &= f(v). \end{cases}$$

2. Vérifier que $\displaystyle\int_u^v p(t)dt = \frac{v-u}{2}\left[f(u) + f(v) + 4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]$.

3. (a) Écrire une procédure `simpson(n,f,a,b)` qui, étant donnée une fonction f, retourne la quantité

$$s_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} p_k(t)dt$$

   où p_k est le polynôme défini à la question 1. sur $[a_{k-1}, a_k]$.

   (b) Calculer une valeur approchée de $s_{10}(f)$ pour $f : x \to exp(-x^2)$ sur $[0,1]$.

   (c) Construire une procédure `iter(p)` pour calculer le nombre d'itérations nécessaires n pour que

$$\left|\int_a^b exp(-x^2)dx - s_n(f)\right| \leq p$$

   puis calculer `iter(`10^{-10}`)`.

Remarque : *si f est de classe C^4 sur $[a,b]$ alors*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - s_n(f)\right| \leq M\frac{(b-a)^5}{2880n^4}$$

où M est un majorant de $\left|f^{(4)}\right|$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, on considère u l'endomorphisme de E tel que

$$u : (x,y,z,t) \mapsto (x - y - z - 3t, -y + 3z + t, x + y + z + 3t, -3x + y + 3z - 2t)$$

1. Donner la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer la dimension de $Im(u)$ et en donner une base.
   Déterminer la dimension de $Ker(u)$ et en donner une base.

3. $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont-ils supplémentaires?

Exercice 3 Le polynôme de Tchébychev d'ordre n est défini pour tout réel t par:

$$T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$$

1. A l'aide de la commande `expand`, linéariser $\cos(it)$ pour $\forall i \in \{0,1,2,3\}$ puis donner les expressions des polynômes $T_i(X)$ pour $\forall\, i \in \{0,1,2,3\}$.
2. Montrer que le polynôme T_n a n racines distinctes dans l'intervalle $[-1,1]$.
3. On admet que $T_{n+2}(X) + T_n(X) = 2XT_{n+1}(X)$.
   Écrire une procédure `tcheby` qui à tout entier n renvoie le polynôme T_n et retrouver les résultats de la question 1.
4. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ pour quelques valeurs de n ainsi que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)T_m(x)]}{\sqrt{1-x^2}}dx$ pour plusieurs couples (n,m) avec $n \neq m$.

Exercice 4 On note $M(a,b)$ la matrice d'ordre 3 définie par

$$M(a,b) := \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux réels.

1. Calculer le déterminant de $M(a,b)$ sous forme factorisée.
2. (a) Donner le rang de $M(1,-1)$ et réaliser le pivot de Gauss sur cette matrice.
   (b) Donner le noyau et l'image de $M(1,-1)$.
   (c) Déterminer le commutant de $M(1,-1)$, c'est à dire l'ensemble des matrices X qui commutent avec $M(1,-1)$. Vérifier que la matrice suivante appartient à ce commutant :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 10 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$