TP21

Suites récurrentes

Exercice 1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction $f(x) = e^x - x - 1$. En déduire son signe.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la seule limite finie possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.
4. Que se passe-t-il si $u_0 = 0$?
5. On suppose que $u_0 < 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n < 0$.
   (b) En déduire qu'elle converge vers 0.
6. On suppose que $u_0 > 0$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (on pourra supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et aboutir à une contradiction).
   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
7. (a) Compléter la fonction Scilab `u` pour que, étant donnés u_0 et n, elle calcule et affiche u_n :

```
function res=u(a,n)
    res=***
    for k=1:n do
        res=***
    end
endfunction
```

   (b) Après avoir entrée la fonction précédente dans l'éditeur, ajouter les commandes suivantes :

```
a=input('Donner a : ')
L=zeros(1,100)
for k=1:100 do
    L(k)=u(a,k)
end
clf
plot(L,"+")
```

   Que représente la liste `L` ?
   Tester pour $a = -2$ et $a = 0$. Cela illustre quels résultats ?

   (c) On suppose dans cette question que $u_0 = 1$.
   Construire une fonction `rangu` qui, étant donné un réel A, permet d'obtenir le plus petit entier n tel que $u_n > A$. Cette fonction utilisera la fonction `u`.
   Tester pour différentes valeurs de A. Commenter.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. Étudier les variations de f et montrer que $f([\frac{1}{2},1]) \subset [\frac{1}{2},1]$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et $v_n \in [\frac{1}{2},1]$.
3. Montrer que, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ, alors ℓ est unique et déterminer sa valeur.
4. Montrer que, pour tout réel $x \in [\frac{1}{2},1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{4}{9}|v_n - \ell|$.
6. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |v_0 - \ell|$.
7. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
8. Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|v_n - \ell| \leq 10^{-9}$.
9. (a) Construire une fonction Scilab `v` qui, étant donné n, calcule et affiche v_n.
   (b) Donner les instructions Scilab pour obtenir la représentation graphique des termes $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Construire une fonction Scilab `rangv` qui permet d'obtenir le plus petit entier n tel que $|v_n - \ell| \leq 10^{-9}$. Cette fonction utilisera la fonction `v`.