TP24

Séries réelles

Exercice 1 Calculer les sommes suivantes après avoir justifié la convergence de la série :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^n} \qquad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!} \qquad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}} \qquad D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{n!}.$$

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^3.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]0, 1[$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^3$ est convergente et calculer sa somme.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n^2}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{4}{3} u_n$.
   (d) Déduire des questions précédentes la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 3 Déterminer la nature des séries suivantes (on ne cherchera pas à calculer leurs sommes) :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{\frac{1}{n}} + 1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{n^3} \qquad D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+\ln(n)}.$$