TP29

Variables aléatoires discrètes - EMLyon 2018, voie E

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les évènements $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X = 2)$ puis calculer leurs probabilités.

   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (n + 1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Faces obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.
On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Faces obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.

   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $(X = n)$.

   (c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad \text{puis} \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

   (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $(X = n)$.

   (c) En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une piéce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

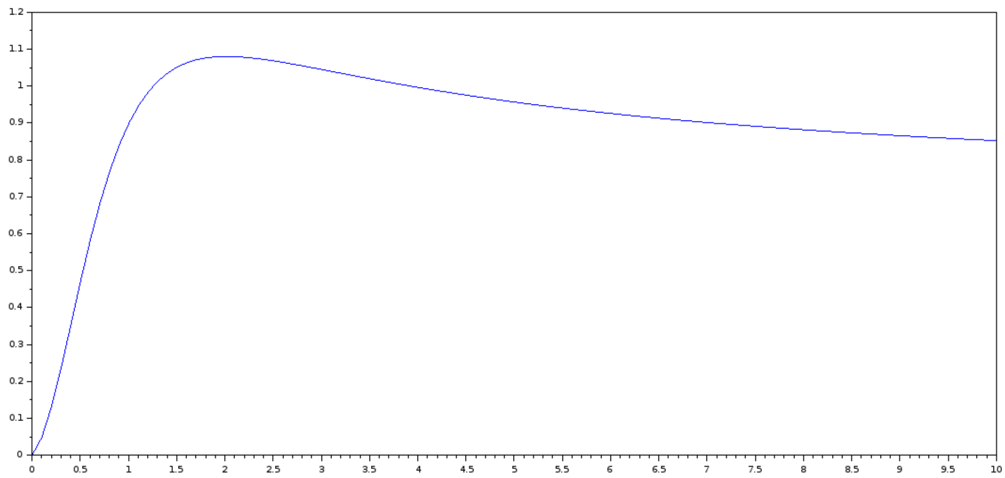
5. **Simulation informatique**

   (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

   (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel $p \in]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
        r = 0
        N = 10^4
         for k = 1:N
                x = simule_X()
                y = simule_Y(p)
                if x <= y then
                        r = r + 1/N
                end
         end
 endfunction
```

(c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



A la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

6. **Étude de la variable aléatoire** Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

(a) Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

(b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

(c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y \geq n) = (1-p)^n$.

7. (a) Montrer : $P(X \leq Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n)$.

(b) Déduire des résultats précédents : $P(X \leq Y) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

(c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.