TP8

Vitesse de convergence d'une suite réelle

Lorsqu'une suite est convergente, on peut s'intéresser à la **vitesse de convergence** de la suite vers sa limite, c'est à dire la rapidité avec laquelle la suite tend vers sa limite. Trois cas sont possibles :

- Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ connue, on cherche à déterminer la première valeur n_0 pour laquelle $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ε étant un réel positif arbitrairement petit. n_0 est alors le rang à partir duquel u_n approche ℓ avec une précision ε.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$. La procédure suivante permet de déterminer la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sqrt{2}$:

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=1
n=0
while abs(u-sqrt(2))>eps do
    u=(1/2)*(u+2/u)
    n=n+1
end
disp(n)
```

On teste pour différentes valeurs de ε :

```
-->exec('C:\TP9-Vitesse de convergence\tp9a.sce', -1)
Donner une valeur de epsilon: 10^-3
    3.
-->exec('C:\TP9-Vitesse de convergence\tp9a.sce', -1)
Donner une valeur de epsilon: 10^-6
    4.
```

On remarque que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge très rapidement vers $\sqrt{2}$: il faut seulement 4 itérations pour que u_n approche $\sqrt{2}$ avec une précision de 10^{-6}.

Exercice 1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule u_n.
2. Déterminer u_n en fonction de n. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 3| \leq \varepsilon$.

- Lorsque deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite ℓ inconnue, on cherche à déterminer la première valeur n_0 pour laquelle $|u_n - v_n| \leq \varepsilon$, ε étant un réel positif arbitrairement petit. n_0 sera alors le rang à partir duquel u_n et v_n approchent ℓ avec une précision ε.

Exemple. Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On a démontré au TD3 que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une limite commune ℓ. La procédure suivante permet de déterminer la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=1
v=2
k=1
while abs(u-v)>eps do
    k=k+1
    u=u+1/(k^2)
    v=u+1/k
end
disp(k)
```

On teste pour différentes valeurs de ε :

```
-->exec('C:\TP9-Vitesse de convergence\tp9b.sce', -1)
Donner une valeur de epsilon: 10^-3
    1000.
-->exec('C:\TP9-Vitesse de convergence\tp9b.sce', -1)
Donner une valeur de epsilon: 10^-6
    1000000.
```

On remarque que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent très lentement vers leur limite commune ℓ : il faut 1000000 itérations pour que u_n et v_n approche ℓ avec une précision de 10^{-6}.

Exercice 2 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite ℓ
2. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule u_n et v_n.
3. Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, calcule une approximation de ℓ à ε près.
4. Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, détermine le plus petit entier n tel que $|u_n - v_n| \leq \varepsilon$.

- Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, on cherche à déterminer la première valeur n_0 pour laquelle $u_n \geq A$, A étant un réel positif arbitrairement grand. n_0 sera alors le rang à partir duquel u_n est plus grand que A.

Exemple. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On a démontré au chapitre 3 que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La procédure suivante permet de déterminer la vitesse avec laquelle u_n diverge vers $+\infty$:

```
A=input('Donner une valeur de A: ')
u=1
n=1
while u<A do
    n=n+1
    u=u+1/n
end
disp(n)
```

On teste pour $A = 10$:

```
-->exec('C:\TP9-Vitesse de convergence\tp9c.sce', -1)
Donner une valeur de A: 10
    12367.
```

On remarque que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge très lentement vers $+\infty$: il faut 12367 itérations pour que u_n soit supérieur à 10. Pour $A = 20$, Scilab n'est plus capable de donner le résultat en un temps raisonnable...

Exercice 3 On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 3, \quad v_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 3v_n.$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule v_n.
2. Déterminer v_n en fonction de n. En déduire le comportement asymptotique de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Construire une procédure qui, étant donné $A > 0$, permet de déterminer le plus petit entier n tel que $v_n \geq A$.

Exercice 4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire que $u_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$.
3. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Construire une procédure qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.