TP 8

# Fonctions de deux variables



### Compétences attendues.

- ✓ Savoir définir sur `Python` une fonction de deux variables.
- ✓ Savoir calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 d'une fonction de deux variables.
- ✓ Savoir mener la recherche des extremums locaux d'une fonction de deux variables.

### Liste des commandes `Python` exigibles aux concours.

Les commandes pour tracer les fonctions de deux variables en dimension 2 ou 3 sont hors programmes. Elles seront donc si nécessaire rappelées dans un sujet de concours.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Les variations des grandeurs économétriques dépendent souvent de plusieurs facteurs. On est alors amenés à étudier des fonctions de plusieurs variables. Nous nous limitons en filière ECG Mathématiques appliquées aux fonctions numériques de deux variables, c'est-à-dire aux fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

**Exemple.** L'application $f$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy,$$

est une fonction de deux variables.

# 1 Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une fonction de deux variables, il y a deux possibilités :

- une représentation en 3 dimensions (dans l'espace $\mathbb{R}^3$) à l'aide d'une surface ;
- une représentation en 2 dimensions (dans l'espace $\mathbb{R}^2$) à l'aide de lignes de niveau.

Voici les librairies à importer pour obtenir ces représentations graphiques :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

## 1.1 Saisie de $f$

Pour définir une fonction $f$ de deux variables sur `Python`, on utilise le code suivant dans l'éditeur :

```
def f(x,y):
    z = .....
    return(z)
```

## 1.2 Représentation de $f$ en dimension 3

Pour représenter une fonction de deux variables $f$ en dimension 3, on place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé tous les points de coordonnées $M = (x, y, f(x, y))$. On obtient ainsi une surface où $x$ est l'abscisse, $y$ est l'ordonnée et $f(x, y)$ est la hauteur.

**Méthode.**

Pour tracer la représentation graphique de $f$ sur $[a, b] \times [c, d]$ en dimension 3, on procèdera comme suit :

1. On crée deux vecteur `x` et `y` découpant les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ en $n$ petits intervalles de même longueur comme suit :

```
x = np.linspace(a,b,n)
y = np.linspace(c,d,n)
```

2. On crée ensuite un maillage $((x_i, y_i))_{1\leq i,j\leq n}$ du domaine $[a, b] \times [c, d]$ avec la commande :

```
X,Y = np.meshgrid(x,y)
```

3. On commande enfin le tracé avec la commande :

```
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection="3d")
ax.plot_surface(X, Y, f(X, Y))
plt.show()
```

**Exercice 1 (★)**
On souhaite représenter graphiquement sur $[-3,3] \times [-3,3]$ la fonction $f$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

1. Tracer la fonction $f$ à l'aide de `Python`. On testera successivement $n = 5, 20, 50, 200$ pour définir les vecteurs `x` et `y`.

   *Dans la suite de ce TP, on prendra $n = 50$ qui est un bon compromis entre la qualité de la représentation du graphe de $f$ et la complexité de calcul pour* `Python`.

2. Émettre des hypothèses sur un (ou des) éventuel extremum (maximum ou minimum) local de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

   *On peut faire tourner le graphe afin de l'orienter à sa guise à l'aide du clic droit.*

---

## 1.3 Représentation de $f$ en dimension 2

Lorsqu'on utilise des cartes pour se représenter une montagne, on utilise la représentation en dimension 2 par lignes de niveau. Cette représentation est bien connue des randonneurs, à travers les cartes IGN !

Cette représentation s'applique aux fonctions de deux variables. Construire la ligne de niveau $k$ consiste à construire dans $\mathbb{R}^2$ la courbe formée par l'ensemble des points $(x,y)$ vérifiant l'équation $f(x,y) = k$.

**Méthode.**
Pour tracer la représentation graphique de $f$ sur $[a,b] \times [c,d]$ en dimension 2, on procèdera comme suit :

1. On crée deux vecteur `x` et `y` découpant les intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ en $n$ petits intervalles de même longueur comme suit :

```
x = np.linspace(a,b,n)
y = np.linspace(c,d,n)
```

2. On crée ensuite un maillage $((x_i, y_i))_{1 \leq i,j \leq n}$ du domaine $[a,b] \times [c,d]$ avec la commande :

```
X,Y = np.meshgrid(x,y)
```

3. On commande enfin le tracé avec la commande :

```
plt.contour(X, Y, f(X, Y), N)
plt.show()
```

ou

```
plt.contour(X, Y, f(X, Y), L)
plt.show()
```

   avec au choix comme dernier paramètre de la fonction `plt.contour` :

   - un entier naturel `N` : dans ce cas, on obtient `N-1` lignes de niveau entre les valeurs minimale et maximale de $f$.
   - une liste `L` : dans ce cas, on obtient les lignes de niveau associées aux valeurs contenues dans la liste `L`.

**Exercice 2 (★)**
On considère toujours la fonction $f$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

1. Tracer les lignes de niveau d'équation $f(x,y) = k$, pour $k \in [\![-10, 10]\!]$.

   Interpréter le résultat graphique obtenu en le comparant à la figure en 3 dimensions réalisée à l'**Exercice 1**.

2. Donner une première valeur approchée des minimums locaux de la fonction $f$ et des points en lesquels ces minimums locaux sont atteints.

3. Resserrer les lignes de niveau jusqu'à obtenir une valeur approchée des minimums locaux de $f$ et des points en lesquels ces minimums locaux sont atteints.

---

# 2 Étude mathématique

## 2.1 Dérivées partielles d'ordre 1

**Définition.**

- On appelle **dérivée partielle par rapport à la première coordonnée** la fonction, notée $\partial_1(f)$ obtenue en dérivant $f$ par rapport à la variable $x$, la variable $y$ étant considérée comme une constante.
- On appelle **dérivée partielle par rapport à la seconde coordonnée** la fonction, notée $\partial_2(f)$ obtenue en dérivant $f$ par rapport à la variable $y$, la variable $x$ étant considérée comme une constante.

**Exercice.** Calculer les dérivées partielles premières de la fonction $f$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

**Définition.**

- On appelle **gradient** de $f$ au point $(x_0, y_0)$ la matrice colonne définie par :

$$\nabla(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x_0,y_0) \\ \partial_2(f)(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

- On appelle **point critique** de $f$ tout point $(x_0, y_0)$ vérifiant l'équation :

$$\nabla(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x_0,y_0) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x_0,y_0) & = & 0 \end{array} \right.$$

**Théorème 1** (Condition nécessaire d'extremum local)

Si $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0)$, alors $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$.

**Attention.**

La réciproque de ce théorème est fausse : un point critique peut ne pas être un extremum local.

**Exercice.** Montrer que $(0,0)$, $(-1,1)$ et $(1,-1)$ sont les seuls points critiques de la fonction $f$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

## 2.2 Dérivées partielles d'ordre 2

**Définition.**

On appelle **dérivées partielles secondes** de $f$ les dérivées partielles de $\partial_1(f)$ et de $\partial_2(f)$. On les note :

$$\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f)), \qquad \partial^2_{2,1}(f) = \partial_2(\partial_1(f)), \qquad \partial^2_{1,2}(f) = \partial_1(\partial_2(f)), \qquad \partial^2_{2,2}(f) = \partial_2(\partial_2(f)).$$

**Exercice.** Calculer les dérivées partielles secondes de la fonction $f$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

**Remarque.** On remarque que $\partial^2_{1,2}(f) = \partial^2_{2,1}(f)$. Cette propriété est générale sur les fonction de classe $\mathscr{C}^2$ (c'est le théorème de Schwarz).

**Définition.**

On appelle **matrice hessienne** de $f$ en $(x, y)$ la matrice définie par :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}.$$

**Théorème 2** (Condition suffisante d'extremum local)

Soit $(x_0, y_0)$ un point critique de $f$. Alors :

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **strictement positives**, alors le point critique est un **minimum** ;
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **strictement négatives**, alors le point critique est un **maximum** ;
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **non nulles** et de **signes opposées**, alors le point critique **n'est pas un extremum** ;
- Si une des valeurs propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, alors on ne peut rien conclure par l'étude de la hessienne.

**Exercice.** Étudier les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

# 3 Exercices

**Exercice 3 (★)**
On pose $D = \mathbb{R}^2$ et $f$ la fonction de deux variables définie sur $D$ par :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = x^2 - y^2.$$

1. Tracer à l'aide de `Python` le graphe de la fonction $f$ pour $x$ et $y$ pris entre $-3$ et 3.
2. Tracer également des lignes de niveau de la fonction $f$ à l'aide de la fonction `plt.contour`.
   *On se servira des valeurs de $f(x, y)$ observées sur le graphe de la question précédente pour donner des niveaux cohérents.*
3. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
4. Déterminer les points critiques de $f$ et donner la matrice hessienne en ces points critiques.
5. Prouver que $f$ n'a pas d'extremum local.

---

**Exercice 4 (★★ - ESC 2002)**
On pose $D = ]0, 1[\times]0, 1[$ et $f$ la fonction de deux variables définie sur $D$ par :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = xy(2 - x - y).$$

1. Tracer à l'aide de `Python` le graphe de la fonction $f$ pour $x$ et $y$ pris entre 0 et 1.
2. Conjecturer l'existence d'extremums locaux et/ou globaux de $f$.
3. Sur une autre figure, tracer des lignes de niveau de la fonction $f$ à l'aide de la fonction `plt.contour`, autour du point critique conjecturé. Les résultats sont-ils en accords avec vos observations ?
   Donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près de l'extremum local $m$ et une valeur approchée à $10^{-1}$ près des coordonnées du point $(x_0, y_0)$ en lequel l'extremum local $m$ est atteint.
4. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
5. Déterminer les points critiques de $f$ sur $D$ et donner la matrice hessienne en ces points critiques.
6. Déterminer les valeurs propres de cette hessienne à l'aide de la fonction `al.eig` (de la librairie `numpy.linalg`) et conclure quand à l'existence d'un extremum local de $f$ sur $D$.

---

**Exercice 5 (★★)**
On pose $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f$ la fonction de deux variables définie sur $D$ par :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = x(\ln(x)^2 + y^2).$$

1. Tracer à l'aide de `Python` le graphe de la fonction $f$ pour $x$ pris entre 0.1 et 2 et $y$ pris entre $-1$ et 1.
2. Conjecturer l'existence d'extremums locaux et/ou globaux de $f$.
3. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
4. Déterminer les points critiques de $f$ et donner la matrice hessienne en ces points critiques.
5. Montrer que $f$ a un unique extremum local et donner la nature de cet extremum.

---

**Exercice 6 (★★ - EDHEC 2005)**
On pose $D = \mathbb{R}^2$ et $f$ la fonction de deux variables définie sur $D$ par :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

1. Tracer à l'aide de `Python` le graphe de la fonction $f$ pour $x$ pris entre $-2$ et 0 et $y$ pris entre $-1$ et 1.
2. Conjecturer l'existence d'extremums locaux et/ou globaux de $f$.
3. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
4. Déterminer les points critiques de $f$ et donner la matrice hessienne en ces points critiques.
5. Montrer que $f$ a un unique extremum local sur $\mathbb{R}^2$ et donner la nature de cet extremum.

---