TP8

Calcul différentiel sur les fonctions réelles

1 Rappels sur les fonctions

Dans les Tp précédents, nous avons vu plusieurs façons de travailler sur les fonctions mathématiques soit en les considérant comme des **expressions algébriques** *(expression)*, soit en les définissant comme des **mécanismes fonctionnels** *(function)*.

Considérons par exemple la fonction mathématique $x \mapsto \dfrac{3x+1}{9-x}$, on en rappelle les principales commandes en fonction du type choisi :

type	*expression*	*function*
pour la définir	`f:=(3x+1)/(9-x)`	`g:x->(3x+1)/(9-x)`
pour l'évaluer en 5	`eval(f,x=5)`	`g(5)`
pour la dériver*	`diff(f,x)`	`D(g)`
pour la représenter	`plot(f,x=-5..5,y=-10..10)`	`plot(g,-5..5,-10..10)`

* pour obtenir des dérivées d'ordre supérieur, par exemple pour la dérivée 3ème, on tapera :

expression	*function*
`diff(f,x$3)`	`D`$^{(3)}$`(g) ou (D@@3)(g)`

D'ailleurs, on pourra remarquer que Maple est capable, dans certains cas, de préciser la dérivée n-ème d'une fonction pour n quelconque :

```
> diff(ln(1+x),x$n)
```

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

2 Développements limités et asymptotiques

Lorsqu'on étudie une fonction, on sera souvent amené à déterminer un développement limité ou asymptotique pour en connaître le comportement <u>localement</u>.

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathbb{C}^n$ sur I, alors le théorème de Taylor-Young montre que f admet un développement limité à l'ordre n en a ($a \in \overset{\circ}{I}$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

  Pour obtenir un tel développement sous Maple, on peut utiliser la commande `taylor`.

- Si on travaille plutôt au voisinage de l'infini, on obtiendra un développement asymptotique en utilisant la commande `asympt`.

Mais pour ne pas multiplier les commandes, on retiendra alors l'utilisation d'une seule fonction plus générale qui selon la valeur de l'argument, nous donne un développement limité ou asymptotique :

`series(f,x=a,n)` qui renvoie le développement de l'expression f en $x = a \in \overline{\mathbb{R}}$, à l'ordre n qui par défaut est 6.

Ainsi,

```
> series(exp(x),x=0)
```

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

```
> series(cos(x),x=0,8)
```

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^6 + O(x^8)$$

```
> series(ln(1+1/x),x=infinity,3)
```

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+O(\frac{1}{x^3})$$

Cependant, il s'agira de faire attention :
dans ces formules, Maple utilise des développements en grand $O(\ )$, or en mathématiques nous travaillons généralement avec des petits $o(\ )$. Ainsi, si vous souhaitez obtenir le développement d'une fonction à l'ordre N, on appliquera la commande `series(f,x=0,n)` pour $n = N + 1$.
Par exemple, si on veut le développement limité de tangente à l'ordre 3 en 0, on tapera :

```
> series(tan(x),x=0,4)
```

$$x+\frac{x^3}{3}+O(x^4)$$

et donc on comprendra : $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)$.

2.1 Obtenir la partie régulière

Si l'on souhaite travailler sur ces développements, on définira la partie régulière de la façon suivante :

```
> series(sin(x),x=0,5):  p:=convert(%,polynom);
```

$$p := x - \frac{1}{6}x^3$$

2.2 Trouver un équivalent

Si l'on cherche seulement à trouver un équivalent, on ajoutera l'option `'leadterm'` à la commande `series` :

```
> f:=(x-ln(1+x))/x:  series('leadterm'(f),x=0);
```

$$\frac{1}{2}x$$

Exercice 1 On considère la fonction $f : x \mapsto arcsin(\dfrac{2x}{1+x^2})$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
2. (a) En utilisant la commande `assume`, placez-vous sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de $f'(x)$ sur cet intervalle, puis montrer que :
   $$\forall x \in]-\infty,-1[,\ f(x) = -2arctan(x) + C$$
   (c) Par continuité de f en -1, en déduire la valeur de C.
3. De la même façon, placez-vous sur l'intervalle $]-1, 1[$ et montrer que :
   $$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = 2arctan(x)$$
4. De la même façon, placez-vous sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et montrer que :
   $$\forall x \in [1,+\infty[,\ f(x) = -2arctan(x) + \pi$$

Exercice 2 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $f(0) = 0$.

1. Calculer les premières dérivées de f pour $x \neq 0$.
2. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$, où P est un polynôme.
   (a) On suppose l'hypothèse vraie au rang n et on pose g l'expression $\dfrac{P(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.
   (b) Déterminer sa dérivée, en déduire que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la limite de $\dfrac{1}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$ en 0.
   (b) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 3 Pour chacune de ces fonctions, déterminer un équivalent au voisinage demandé :

1. $f(x) = (x^2 + x - 2)\tan(\frac{\pi x}{2})$, en $x = 1$
2. $g(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{sh(x)}$, en $x = 0$
3. $h(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x^2}$, en $x = +\infty$
4. $i(x) = x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}}$, en $x = 0$
5. $j(x) = \ln(1 + \frac{x}{\sqrt{x}})$, en $x = +\infty$.

Exercice 4 On note f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(1 + x)$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit g sa bijection réciproque : on va déterminer le développement de g en 0 à l'ordre 3.
   (a) Définir p la partie régulière du $DL_3(0)$ de f.
   (b) On pose $q = a + bx + c\frac{x^2}{2} + d\frac{x^3}{6}$ la partie régulière du développement de g cherché à l'ordre 3.

   Pour déterminer les coefficients a, b, c, d, on procèdera ainsi :
   - définir l'équation $q \circ p - x = 0$,
   - regrouper les termes en fonction de leur puissance de x à l'aide de la commande `collect`,
   - dans l'expression obtenue, définir s la partie régulière tronquée à l'ordre 3,
   - identifier chacun des coefficients à l'aide de la commande `coeffs`,
   - résoudre un système pour obtenir les coefficients à l'aide de la commande `solve({%})`.
3. En déduire la position relative de g par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 5 Dans cet exercice, on étudie la fonction f définie par $f(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}$ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

1. Calculer la dérivée de f. En déduire les valeurs x en lesquelles $f'(x) = 0$. On utilisera la commande `fsolve`.
2. Construire alors le tableau de variations de f sans oublier de préciser les limites aux bornes.
3. Déterminer l'équation h de l'asymptote à Cf au voisinage de l'infini, ainsi que leur position relative.
4. Tracer dans un même graphique les courbes Cf et Ch. On n'oubliera pas de préciser la discontinuité dans la commande `plot`.

Exercice 6 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le $DL_1(0)$ de f. On notera g sa partie régulière.
2. Déterminer le $DL_3(0)$ de f. On notera h sa partie régulière.
3. Déterminer le $DL_5(0)$ de f. On notera i sa partie régulière.
4. Tracer alors dans un même graphique les courbes associées aux fonctions f, g, h et i.