TP9

Étude de fonction

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes (en précisant si on utilise le théorème des croissances comparées) :

(1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x}$ (2) $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$ (3) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}}$

(4) $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$ (5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$ (6) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(\ln(x))^2}$

(7) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ (8) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{\ln(x)}}$ (9) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$

(10) $\lim_{x\to 1^+} e^{1/\ln(x)}$ (11) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{e^x}$ (12) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité, les limites aux bornes de l'ensemble de définition (en précisant s'il y a des asymptotes horizontales ou verticales) et la fonction dérivée :

$f(x) = \ln(1+x^2)$ $g(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$ $h(x) = \exp\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$i(x) = \sqrt{x^2+1}+x$ $j(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$ $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$l(x) = \ln(3-\sqrt{x})$ $m(x) = x^{1/x}$ $n(x) = (3-x)^{\ln(x)}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)+2x^2+2}{x}.$$

On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Préciser si $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale ou verticale.
3. (a) Calculer la dériver de f, en précisant sur quel ensemble f est dérivable.
   (b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = 2x^2 - \ln(x) - 1$. Étudier les variations de g.
   (c) A l'aide de son tableau de variation, prouver que g admet un minimum, calculer la valeur de ce minimum et justifier que ce minimum est strictement positif (on rappelle que $\ln(2) > \frac{1}{2}$). En déduire le signe de g.
   (d) En déduire le signe de la dérivée de f puis tracer le tableau de variation de f.
4. (a) Déterminer le réel a tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
   (b) Déterminer le réel b tel que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$.
   (c) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique, notée Δ, au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation.
   (d) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé (on pourra utiliser que $exp(-2) = 0.14$).