TP9

Résolution approchée d'équations $f(x) = 0$

Dans le dernier TP, nous avons vu que les formules de Taylor pouvaient nous permettre d'approcher localement une fonction par une expression polynomiale.
Bien appliquées, elles peuvent également nous donner le comportement asymptotique de suites très classiques:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Exercice 1 Dans cet exercice, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Construire la procédure `converge` qui, pour un entier n donné, affiche les valeurs $|S_k - \ln(2)|$ pour k allant de 1 à n.
   Vérifier alors que la suite (S_n) converge en appelant la procédure pour $n = 100$.

2. Construire la procédure `nbitération` qui, pour une précision a donnée, calcule les valeurs S_k tant que $|S_k - \ln(2)| > 10^{-a}$, puis renvoie le nombre d'itérations nécessaire pour approcher la limite à 10^{-a} près.
   En déduire le nombre d'itérations nécessaire pour approcher $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

Sur le même principe, nous allons voir dans ce TP comment il est possible de construire des suites dont la limite sera la solution d'une équation. On parle alors de **résolution approchée d'une équation** et les méthodes sont nombreuses.

Considérons une application réelle f continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ s'annulant pour une seule et unique valeur $\alpha \in]a, b[$. On ne peut pas forcément calculer explicitement α, et on doit parfois utiliser des méthodes de calcul approché pour avoir une bonne estimation de la valeur de α. Nous présentons ici deux méthodes numériques de calcul approché.

1 Dichotomie

La première méthode est basée sur le principe de dichotomie. On suppose de plus ici que f s'annule en α et change de signe. En particulier, on a $f(a)f(b) < 0$. Le principe de dichotomie consiste à construire une suite d'intervalles fermés $[a_n, b_n]$ contenant α. Pour cela, on définit les suites (a_n), (b_n) et (c_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ , \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & si\ f(a_n)f(c_{n+1}) \leq 0 \\ c_{n+1} & sinon \end{cases} \ , \quad b_{n+1} = \begin{cases} c_{n+1} & si\ f(a_n)f(c_{n+1}) \leq 0 \\ b_n & sinon \end{cases}$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
   (b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, et que $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$.

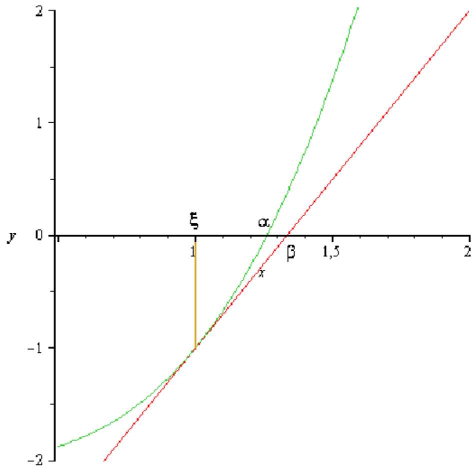
Exercice 2 2. Ecrire une procédure `dichotomie(f,a,b,`ϵ`)` qui pour une fonction f donnée sur l'intervalle $[a, b]$, construit les termes des suites (a_n) et (b_n) tant que $|b_n - a_n| \geq \epsilon$, puis renvoie l'approximation de α à au plus ϵ près (ϵ étant une marge d'erreur entrée par l'utilisateur).

3. Application au calcul de $\sqrt{2}$.
   (a) Appliquer la procédure `dichotomie` à $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1, 2]$ pour plusieurs valeurs de ϵ.
   (b) Modifier la procédure `dichotomie` pour pouvoir calculer le nombre d'étapes nécessaires pour avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec 11 décimales.

2 Méthode de Newton

On suppose ici que f est continue dérivable dont la dérivée ne s'annule pas dans un voisinage $V(\alpha)$ de α. On suppose disposer d'une valeur approchée grossière $\xi \in V(\alpha)$ de α.

Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. α étant l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses, l'idée est de remplacer $\mathcal{C}$ par sa tangente en ξ. Cette tangente rencontre l'axe Ox en un point d'abscisse β; en général β est une meilleure approximation de α que ξ.

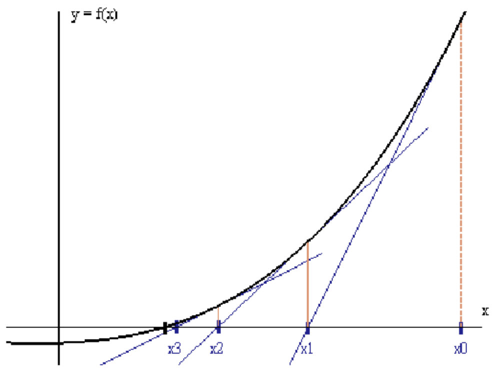


1. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ξ.
2. En déduire β.
3. Application au calcul de $\sqrt{2}$: on applique ceci à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$. Donner l'expression de β. Quelle valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtient-on pour $\xi = 2$? Pour $\xi = \frac{3}{2}$?

L'algorithme de Newton consiste à itérer ce raisonnement, lorsque f' ne s'annule pas: on définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $x_0 = \xi$, $x_1 = \beta$, puis pour tout n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Graphiquement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite comme suit:



4. Vérifier que si (x_n) a une limite l, alors $f(l) = 0$.
5. Montrer que la suite obtenue pour le calcul de $\sqrt{2}$ par l'algorithme de Newton est définie par $x_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Exercice 3 6. Ecrire une procédure `newton(ϵ)` qui calcul par la méthode de Newton une approximation de $\sqrt{2}$ en prenant $x_0 = \frac{3}{2}$ et avec la condition d'arrêt: $\mid x_n - \sqrt{2} \mid \leq \epsilon$, ϵ étant rentré par l'utilisateur.

7. Modifier cette procédure pour pouvoir calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir une erreur inférieure à 10^{-11}. Comparer avec le résultat obtenu pour la méthode de la dichotomie.