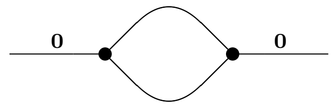
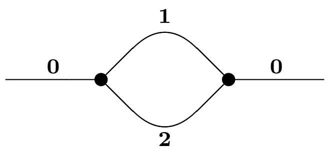
Jeu YY

Règle et but du jeu

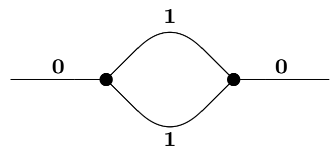
Compléter l'étiquetage des arêtes du graphe par les chiffres 0, 1 ou 2 de sorte que les trois arêtes issues de chaque sommet ont toutes des étiquettes différentes.

Par exemple, complétons l'étiquetage du graphe 

,



Ceci est un bon étiquetage !



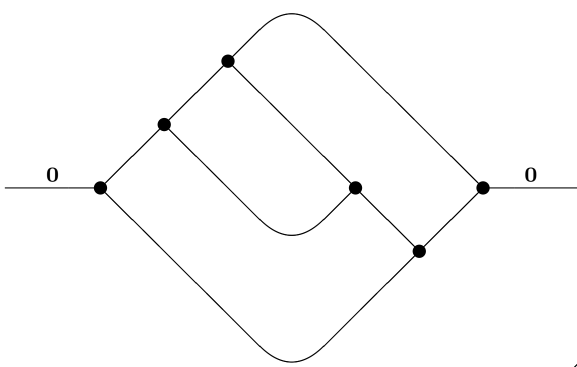
Ceci est un mauvais étiquetage !

Bien entendu, il est possible qu'il y ait plusieurs bons étiquetages.

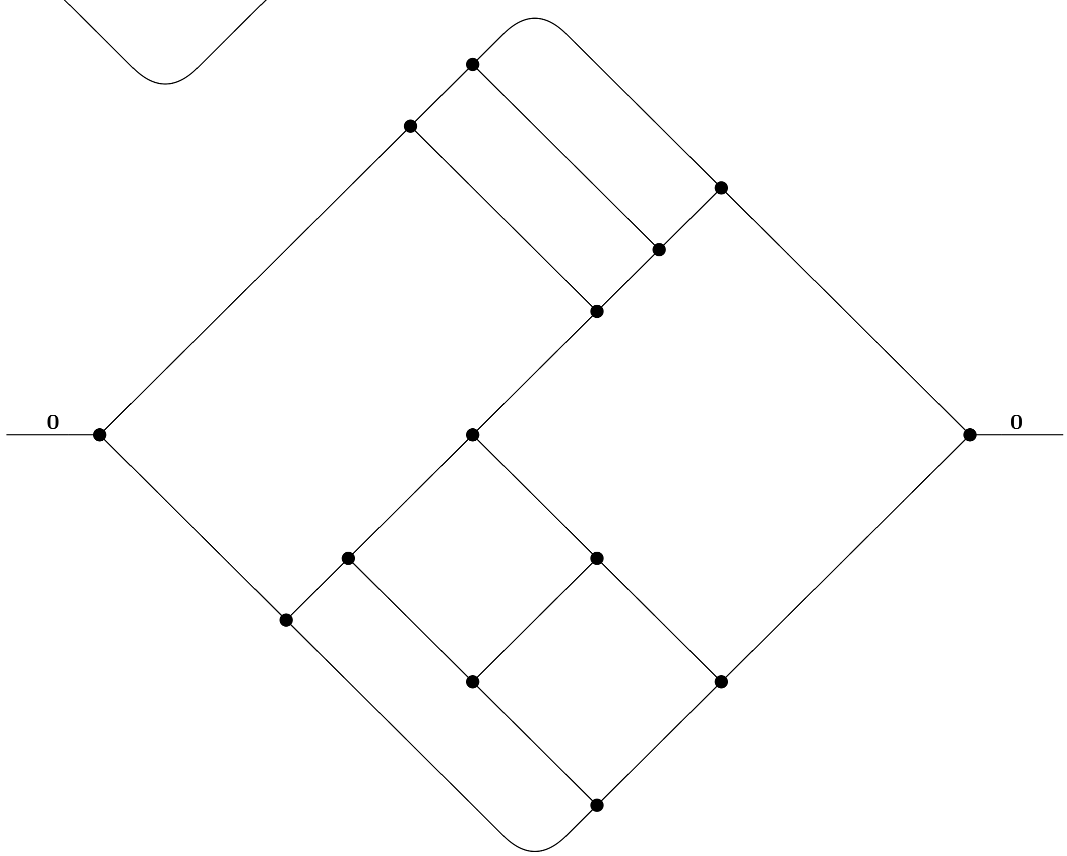
À vous !

Trouver un bon étiquetage pour les graphes suivants:

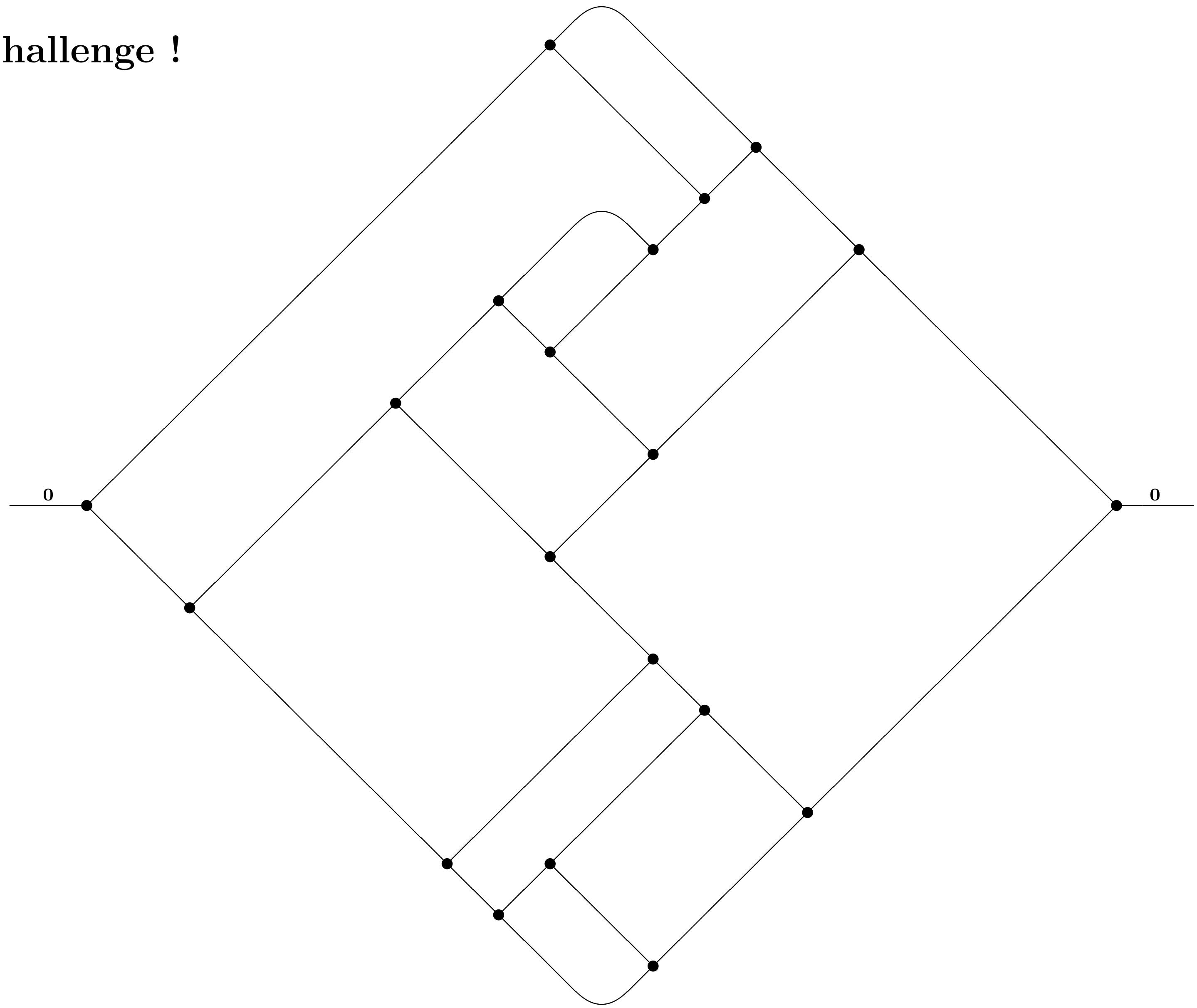
Facile



Intermédiaire



Challenge !



Contexte mathématique

Parenthésage d'un produit de n objets et arbre binaire à n feuilles.

En mathématiques, on rencontre des objets que l'on peut « multiplier » ou faire le « produit ». Mais contrairement à la multiplication habituelle des nombres, cette opération peut être :

$\boxed{\text{Non commutative } ab \neq ba}$ $\boxed{\text{Non associative } (ab)c \neq a(bc)}$

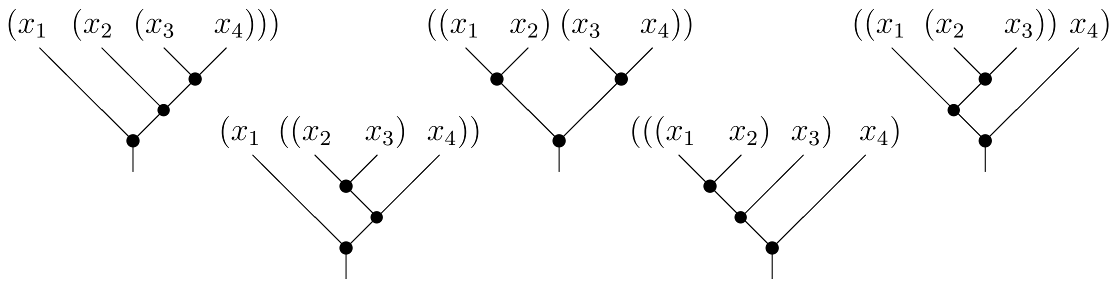
Par exemple, l'opération qui à deux entiers relatifs a et b associe $a - b$ n'est ni commutative ni associative car $1 - 2 \neq 2 - 1$ et $(3 - 2) - 1 \neq 3 - (2 - 1)$.

Lorsque ce produit est non associatif, il est important de préciser l'ordre de produit en y ajoutant des parenthèses. Pour un produit de n objets, plusieurs parenthésages sont possibles.

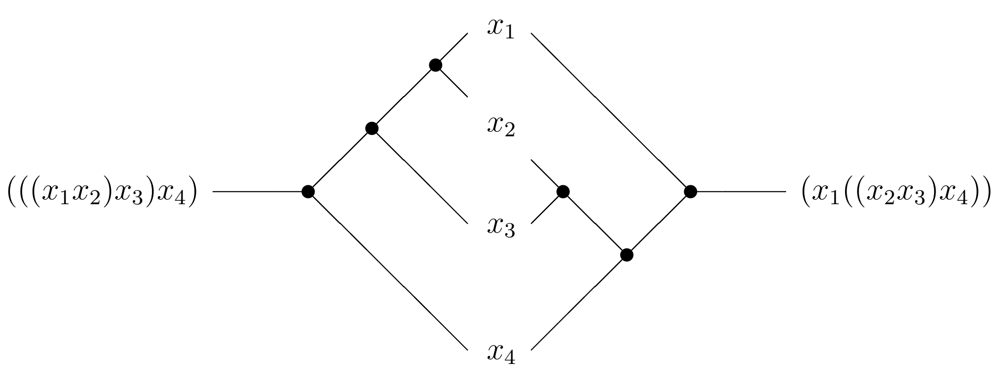
$n = 3$: $((x_1x_2)x_3)\ ,\ (x_1(x_2x_3))$

$n = 4$: $(x_1(x_2(x_3x_4)))\ ,\ ((x_1x_2)(x_3x_4))\ ,\ ((x_1(x_2x_3))x_4)\ ,\ (x_1((x_2x_3)x_4))\ ,\ (((x_1x_2)x_3)x_4)$

On peut associer à un parenthésage de n objets un arbre binaire à n feuilles. C'est un graphe donnant les produits successifs indexés par les sommets. Pour $n = 4$, on a



Les graphes proposés dans le jeu YY sont obtenus en prenant d'abord les graphes de deux parenthésages d'un produit de n objets, et puis les coller ensemble à travers les objets. Le graphe « facile » est obtenu comme suit:



Considérons le produit suivant sur les quatre objets $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$

$$\mathbf{0.1 = 1.0 = 2, 0.2 = 2.0 = 1, 1.2 = 2.1 = 0,}$$
$$\mathbf{0.0 = 1.1 = 2.2 = 3.3 = 3.0 = 3.1 = 3.2 = 2.3 = 1.3 = 0.3 = 3.}$$

Un bon étiquetage dans le jeu YY revient alors à l'existence des objets $x_1, \ldots, x_n$, tous des $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ ou $\mathbf{2}$, tels que les produits donnés par les deux parenthésages valent $\mathbf{0}$. Pour trouver un bon étiquetage du graphe « facile », il revient à trouver x_1, x_2, x_3, x_4 tels que

$$(((x_1x_2)x_3)x_4) = (x_1((x_2x_3)x_4)) = \mathbf{0}.$$

On peut vérifier que $x_1 = x_3 = x_4 = \mathbf{1}$ et $x_2 = \mathbf{2}$ est une solution.

Un problème (toujours) ouvert.

- Il a été conjecturé qu'il y a toujours une solution quelques soient le choix des parenthésages.
- Ce problème est une version particulière d'un problème lié à la conjecture des 4 couleurs.
- *Référence : Loday J.-L., The YY game (2011).*

Solutions

Avec la numérotation de haut en bas $(x_1, \ldots, x_n)$.

Facile.

$$(1,2,1,1),(2,1,2,2)$$

Intermédiaire.

$$(1,2,2,0,1,2,1,0),(2,1,1,0,2,1,2,0),(1,2,2,0,2,1,0,1),(1,2,2,0,1,2,0,1),$$
$$(1,2,2,0,1,0,2,1),(2,1,1,0,2,1,0,2),(2,1,1,0,1,2,0,2),(2,1,1,0,2,0,1,2)$$

Challenge.

$$(0,1,2,1,2,1,0,1,1,0,1),(1,0,0,2,0,2,0,1,1,0,1),(0,1,1,2,1,2,0,1,1,0,1),$$
$$(1,0,2,0,2,0,2,1,1,2,1),(0,1,2,1,2,1,2,1,1,2,1),(2,0,0,1,0,1,0,2,2,0,2),$$
$$(0,2,2,1,2,1,0,2,2,0,2),(0,2,1,2,1,2,0,2,2,0,2),(2,0,1,0,1,0,1,2,2,1,2),$$
$$(0,2,1,2,1,2,1,2,2,1,2)$$