Déformations de bigèbres de Lie

Anthony Mansuy

Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail : anthony.mansuy@univ-reims.fr

Juin 2011

Table des matières

1 Topologie h-adique

Rappels sur les limites projectives.

Un système projectif de groupes abéliens $(A_n, p_n)_{n\geq 0}$ est une famille $(A_n)_{n\geq 0}$ de groupes abéliens et de morphismes de groupes $(p_n : A_n \to A_{n-1})_{n>0}$. Étant donné un tel système, on peut définir la limite projective notée $\varprojlim A_n$ par

$$\varprojlim A_n = \left\{ (x_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} A_n \ \middle|\ p_n(x_n) = x_{n-1},\ \forall n > 0 \right\}.$$

C'est un sous-groupe du groupe $\prod_{n\geq 0} A_n$. La projection naturelle de $\prod_{n\geq 0} A_n$ sur A_k se restreint en un morphisme de groupe $\pi_k : \varprojlim A_n \to A_k$, définit par $\pi_k((x_n)_n) = x_k$. Si p_n est surjective $\forall n$, alors les applications π_n sont aussi surjectives.

Par définition de la limite projective, nous avons : $\forall n > 0$,

$$p_n \circ \pi_n = \pi_{n-1}.$$

Nous avons la propriété universelle suivante :

Proposition 1 *Pour tout groupe abélien C et pour toute famille $(f_n : C \to A_n)_{n\geq 0}$ de morphismes de groupes tels que $p_n \circ f_n = f_{n-1}$, $\forall n > 0$, il existe un unique morphisme de groupe $f : C \to \varprojlim A_n$ tel que $\pi_n \circ f = f_n$, $\forall n \geq 0$.*

Preuve. La famille $(f_n)_{n\geq 0}$ définie un unique morphisme $f : C \to \prod_{n\geq 0} A_n$. Par hypothèse, $p_n \circ f_n = f_{n-1}$, donc l'image de f est un sous-groupe de $\varprojlim A_n$. Cela prouve l'éxistence et la condition $\pi_n \circ f = f_n$ implique l'unicité. □

On peut définir un morphisme d'un système projectif $(A_n, p_n)_{n\geq 0}$ dans un autre système projectif $(A'_n, p'_n)_{n\geq 0}$ comme une famille $(f_n : A_n \to A'_n)_{n\geq 0}$ de morphismes de groupes telle que $p'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ p_n$, $\forall n > 0$.

Proposition 2 *Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique morphisme de groupes*

$$f = \varprojlim f_n : \varprojlim A_n \to \varprojlim A'_n$$

tel que $\pi'_n \circ f = f_n \circ \pi_n$, *pour tout* $n \geq 0$.

Preuve. La famille $(f_n \circ \pi_n : \varprojlim A_n \to A'_n)_{n\geq 0}$ satisfait aux hypothèses de la proposition 1. Alors il existe un unique morphisme f tel que $\pi'_n \circ f = f_n \circ \pi_n$, pour tout $n \geq 0$. □

Remarques.

1. Il est possible de composer les morphismes de systèmes projectifs, et on obtient
$$(\varprojlim f_n) \circ (\varprojlim g_n) = \varprojlim f_n \circ g_n.$$
2. La limite projective d'un système projectif $(A_n, p_n)_{n\geq 0}$ possède une topologie naturelle, appelée la topologie de la limite projective. On la définie comme suit : pour tout $n \geq 0$, on munit A_n de la topologie discrète ; la topologie de la limite projective sur $\varprojlim A_n$ est la topologie induite de la topologie produit sur $\prod_{n\geq 0} A_n$. Par définition, les applications $\pi_k : \varprojlim A_n \to A_k$ sont continues. De plus, une application f d'un espace topologique dans $\varprojlim A_n$ est continue si et seulement si les applications $\pi_n \circ f$ à valeurs dans A_n sont continues pour tout $n \geq 0$.
3. On peut remplacer dans tout ce qui précède "groupe abélien" par "anneau", "module" ...

Soit k un corps. On notera $K = k[[h]]$ l'algèbre des séries formelles à une indéterminée h. C'est une k-algèbre commutative, intègre et locale, avec comme unique idéal maximal l'idéal (h) engendré par h.

Soit $n > 0$. Notons $K_n = k[h]/(h^n)$, et $\pi_n : K \to K_n$ la surjection qui, à une série formelle $\sum_{k\geq 0} a_k h^k$ associe la classe $\sum_{k=0}^{n-1} a_k h^k$ modulo (h^n). Son noyau est l'idéal (h^n) engendré par h^n dans K. Alors π_n induit un isomorphisme d'algèbres

$$k[[h]]/(h^n) \cong k[h]/(h^n). \tag{1}$$

Pour tout $n > 0$, notons $p_n : K_n \to K_{n-1}$ la surjection canonique, de sorte que l'on peut considérer le système projectif d'algèbres $(K_n, p_n)_{n\geq 0}$ et $\varprojlim K_n$ la limite projective. Remarquons que $p_n \circ \pi_n = \pi_{n-1}$, $\forall n > 0$. La proposition 1 permet de montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbres $\pi : K \to \varprojlim K_n$ tel que la composition avec la projection de $\varprojlim K_n$ sur K_k soit égale à π_k. Alors on a la

Proposition 3 *L'application* $\pi : K \to \varprojlim K_n$ *est un isomorphisme d'algèbres.*

Preuve. π est injective car son noyau, qui est l'intersection de tous les idéaux (h^n), est nul.

Pour la surjectivité, considérons $(f_n)_{n\geq 0}$ un élément $\in \varprojlim K_n$. Par définition, $f_n \in K_n$ et admet un représentant de la forme $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} h^k$ modulo (h^n). De plus, $p_n(f_n) = f_{n-1}$, $\forall n > 0$. Ainsi, $a_k^{(n)} = a_k^{(n-1)}$, $\forall k \in \{0, \ldots, n-2\}$. Posons $f = \sum_{n\geq 0} a_n h^n \in K$, avec a_n défini par $a_n = a_n^{(n+2)} = a_n^{(n+3)} = \ldots$. Alors $\pi(f) = f_n$. □

La proposition 3 permet de munir K de la topologie de la limite projective, appelée topologie h-adique. Comme $\{0\}$ est un ouvert de l'ensemble discret K_n, la famille $\left(\pi_n^{-1}(\{0\})\right)_{n\geq 0} = \left((h^n)\right)_{n\geq 0}$ est une base de voisinage ouvert de 0 dans K pour la topologie h-adique. On peut alors montrer que la topologie h-adique est une topologie définie par une métrique : $\forall f = \sum_{n\geq 0} a_n h^n \in K$, on pose

$$w(f) = \begin{cases} n \text{ si } a_n \neq 0 \text{ et } a_k = 0, \forall k < n, \\ +\infty \text{ si } f = 0. \end{cases}$$

Alors $(h^n) = \{f \in K \mid w(f) > n-1\}$. On a $\bigcap_{n\geq 0}(h^n) = \{0\}$, et $\forall f, g \in K$,

$$w(f+g) \geq min(w(f), w(g).$$

Posons, $\forall f \in K$, $\mid f \mid = 2^{-w(f)}$, et $\mid 0 \mid = 0$. Alors nous avons le lemme suivant, dont la démonstration est triviale :

Lemme 4 *Pour tout $f, g \in K$, $\mid f \mid = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\mid -f \mid = \mid f \mid$, et $\mid f + g \mid \leq \mid f \mid + \mid g \mid$.*

Corollaire 5 *Posons $d(f,g) = \mid f - g \mid$, $\forall f, g \in K$. Alors d est une distance ultrametrique sur K, c'est-à-dire : $\forall f, g, h \in K$,*

1. *$d(f,g) = d(g,f)$,*
2. *$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$,*
3. *$d(f,h) \leq max(d(f,g), d(g,h))$.*

Ainsi (K,d) est un espace métrique. Il est évident que la famille d'idéaux $\left((h^n)\right)_{n\geq 0}$ est une base de voisinages ouverts de 0 pour cette métrique. La topologie associée à la distance d est donc équivalente à la topologie h-adique.

Soit M un module à gauche sur l'algèbre K. Considérons la famille $(h^n M)_{n\geq 0}$ de sous modules et les projections K-linéaires canoniques

$$p_n : M_n = M/h^n M \to M_{n-1} = M/h^{n-1}M.$$

La famille $(M_n, p_n)_{n\geq 0}$ forme un système projectif de K-modules, et on peut considérer la limite projective

$$M_h = \varprojlim M_n$$

qui a une structure naturelle de K-module. M_h a une topologie naturelle, la topologie de la limite projective avec, comme précédemment, $(h^n M_h)_{n\geq 0}$ une famille de sous-modules qui est une base de voisinages ouverts de 0. On dit que M_h est la complétion h-adique de M.

Les projections $i_n : M \to M_n$ induisent une unique application K-linéaire $i : M \to M_h$ telle que $\pi_n \circ i = i_n$, $\forall n$. On a $Ker(i) = \bigcap_{n>0} h^n M$.

Définition 6 1. *Un K-module M est séparé si i est injective.*

2. *Il est complet si i est surjective.*

Remarques. Pour tout module M, le module $M/(\bigcap_{n>0} h^n M)$ est séparé, et la complétion M_h est complète. En effet, considérons $\pi_n : M_h \to M_n$, de noyau $h^n M_h$, qui induit l'isomorphisme de modules $M_h/h^n M_h \cong M_n$. En prenant la limite projective, on obtient que $(M_h)_h = M_h$, ce qui prouve que M_h est complet.

Tout K-module séparé complet peut être munit de la topologie h-adique, provenant de la topologie de la limite projective sur M_h via l'isomorphisme $M \cong M_h$.

Décrivons un exemple important de K-module séparé et complet. Soit V un k-espace vectoriel, $V[[h]]$ l'ensemble des séries formelles $\sum_{n\geq 0} v_n h^n$, où $(v_0, v_1, \ldots)$ est une famille infinie d'éléments de V. On peut munir $V[[h]]$ d'une structure de K-module à gauche avec les formules

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n\geq 0} v_n h^n + \sum_{n\geq 0} w_n h^n &= \textstyle\sum_{n\geq 0} (v_n + w_n) h^n, \\ \left(\textstyle\sum_{n\geq 0} a_n h^n\right) \cdot \left(\textstyle\sum_{n\geq 0} v_n h^n\right) &= \textstyle\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p+q=n} a_p v_q\right) h^n, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\sum_{n\geq 0} a_n h^n \in K$ et $\sum_{n\geq 0} v_n h^n, \sum_{n\geq 0} w_n h^n \in V[[h]]$. Un K-module de cette forme est appelé un module topologiquement libre.

Proposition 7 *Tout module topologiquement libre est séparé et complet.*

Preuve. Par définition, $h^n V[[h]]$ est un sous-module formé de tout les éléments $\sum_{n\geq 0} v_n h^n$ tels que $v_0 = \ldots = v_{n-1} = 0$. Donc l'intersection de tous ces sous-modules est nulle. Cela implique que $V[[h]]$ est séparé.

Une preuve analogue à celle de la proposition 3 montre que $V[[h]]$ est isomorphe à la limite projective de la famille $(V[[h]]/h^n V[[h]], p_n)_{n>0}$. □

Remarques. Comme dans le cas $V = k$, la topologie h-adique sur $V[[h]]$ induit par la topologie de la limite projective peut être définie par une métrique construite de la même façon que pour K.

Proposition 8
1. *Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel V. Alors le K-sous-module engendré par la famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est dense dans $V[[h]]$ pour la topologie h-adique.*
2. *Pour tout K-module séparé complet N, il y a une bijection naturelle*

$$Hom_K(V[[h]], N) \cong Hom_k(V, N),$$

où $Hom_K(V[[h]], N)$ est l'espace des applications K-linéaires.

Remarques. Une application K-linéaire $f : M \to N$ entre deux K-modules séparés et complets est toujours continue pour la topologie h-adique car $f(h^n M)$ est inclu dans $h^n N$ par K-linéarité.

Preuve.

1. Soit W le sous-module de $V[[h]]$ engendré par l'ensemble $\{e_i\}_{i\in I}$. Considérons un élément $f = \sum_{n\geq 0} v_n h^n \in V[[h]]$. On doit montrer que, pour tout $n > 0$, il existe un élément $f_n \in W$ tel que $f - f_n \in h^n V[[h]]$. On construit f comme suit : tout d'abord on écrit $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k h^k$; $f - f_n \in h^n V[[h]]$; il reste à montrer que $f_n \in W$: comme $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base de W,

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i\in I} \lambda_i^{(k)} e_i \right) h^k = \sum_{i\in I} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^{(k)} h^k \right) e_i \in W,$$

où $\lambda_i^{(k)}$ est une famille presque nulle d'éléments de k.

2. Soit f une application K-linéaire continue de $V[[h]]$ dans N. En considérant V comme l'espace des séries formelles constantes dans $V[[h]]$, on peut restreindre f en une application k-linéaire de V dans N.

Réciproquement, soit g une application k-linéaire de V dans N. On peut l'étendre en une application K_n-linéaire g_n de $V[[h]]/h^n V[[h]]$ dans $N/h^n N$ par

$$g_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k h^k \right) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} g_n(v_k) h^k \ (mod\ h^n N).$$

En prenant la limite projective, on définit une application K-linéaire g_∞ entre les limites projectives correspondantes. Comme $V[[h]]$ et N sont séparés et complets, on obtient une application, encore notée g_∞, de $V[[h]]$ dans N. Cette application se restreint à g sur V.

□

Rappelons qu'un K-module M est sans torsion si $hm \neq 0$ lorsque m est un élément non nul quelconque de M.

Proposition 9 *Un K-module à gauche est topologiquement libre si et seulement si il est séparé, complet et sans torsion.*

Preuve. Par la proposition 7, on sait que tout module topologiquement libre est complet et séparé. La formule (2) montre qu'il est aussi sans torsion.

Réciproquement, soit M un module séparé, complet et sans torsion. Montrons que M est de la forme $V[[h]]$. Soit V un sous-espace vectoriel de M supplémentaire de hM. Comme il est sans torsion, on a : $h^nM = h^nV \oplus h^{n+1}M$, $\forall n \geq 0$. Ainsi,

$$M/h^nM = V \oplus hV \oplus \ldots \oplus h^{n-1}V = V[[h]]/h^nV[[h]].$$

En prenant les limites projectives et en utilisant le fait que M et $V[[h]]$ sont séparés et complets, on obtient :

$$M \cong \varprojlim M/h^nM = \varprojlim V[[h]]/h^nV[[h]] \cong V[[h]].$$

□

Remarques. $V[[h]] \cong V \otimes k[[h]]$ si et seulement si V est de dimension finie. Si V est de dimension infinie, $V[[h]]$ est strictement plus grand que $V \otimes k[[h]]$: on peut prendre une famille infinie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs linéairement indépendants, et alors l'élément $\sum_{n\geq 0} e_nh^n \in V[[h]]$, mais $\notin V \otimes k[[h]]$.

Soit M, N deux modules à gauche sur l'algèbre K. Considérons le K-module $M \otimes_K N$ défini par

$$M \otimes_K N = M \otimes N / < fm \otimes n - m \otimes fn \mid f \in K, m \in M, n \in N > .$$

Définition 10 *Le produit tensoriel topologique $M\tilde{\otimes}N$ de M et N est la completion h-adique de $M \otimes_K N$:*

$$M\tilde{\otimes}N = (M \otimes_K N)_h = \varprojlim (M \otimes_K N)/h^n(M \otimes_K N).$$

Par definition, le produit tensoriel topologique de deux modules est toujours complet. Notons $m\tilde{\otimes}n$ l'image de $m\otimes n$ par $M\otimes N \to M\otimes_K N \to M\tilde{\otimes}N$. Le sous-espace engendré par les éléments $m\tilde{\otimes}n$ dans $M\tilde{\otimes}N$ est dense dans $M\tilde{\otimes}N$. On a les K-isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} (M\tilde{\otimes}N)\tilde{\otimes}P &\cong M\tilde{\otimes}(N\tilde{\otimes}P), \\ M\tilde{\otimes}N &\cong N\tilde{\otimes}M, \\ K\tilde{\otimes}M \cong M\tilde{\otimes}K &\cong M. \end{aligned}$$

Étant données $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$, on peut définir l'application K-linéaire $f\tilde{\otimes}g : M\tilde{\otimes}N \to M'\tilde{\otimes}N'$.

Proposition 11 *Si M, N sont deux modules topologiquement libres, alors $M\tilde{\otimes}N$ aussi. Plus précisément, on a :*

$$V[[h]]\tilde{\otimes}W[[h]] = (V \otimes W)[[h]].$$

Preuve. Pour tout K-module M, les applications

$$M \otimes_K K_n \to M \otimes_K K/h^n K \to M/h^n M$$

sont des isomorphismes, le premier étant donné par (1), le deuxième par $m \otimes f \mapsto fm$ (l'inverse étant $m \mapsto m \otimes 1$). Appliquons cela à $M \otimes_K N$ où $M = V[[h]]$ et $N = W[[h]]$,

$$\begin{aligned}
(M \otimes_K N)/h^n(M \otimes_K N) &\cong (M \otimes_K N) \otimes_K K_n \\
&\cong (M \otimes_K K_n) \otimes_{K_n} (N \otimes_K K_n) \\
&\cong (M/h^n M) \otimes_{K_n} (N/h^n N) \\
&\cong (V \otimes K_n) \otimes_{K_n} (W \otimes K_n) \\
&\cong (V \otimes W) \otimes K_n \\
&\cong (V \otimes W)[[h]]/h^n(V \otimes W)[[h]]
\end{aligned}$$

Par passage à la limite projective, on obtient le résultat. $\square$

Pour la définition d'une algèbre de Hopf, on pourra par exemple consulter [1].

Définition 12 1. *Une algèbre de Hopf topologique sur $K = k[[h]]$ est un sextuplet $(A_h, \mu_h, \eta_h, \Delta_h, \varepsilon_h, S_h)$ où A_h est un module sur K, $\mu_h : A_h \tilde{\otimes} A_h \to A_h$, $\eta_h : K \to A_h$, $\Delta_h : A_h \to A_h \tilde{\otimes} A_h$, $\varepsilon_h : A_h \to K$ et $S_h : A_h \to A_h$ des applications K-linéaires telles que :*

$$\begin{cases}
\mu_h \circ (\mu_h \tilde{\otimes} id_{A_h}) = \mu_h \circ (id_{A_h} \tilde{\otimes} \mu_h) \\
\mu_h \circ (\eta_h \tilde{\otimes} id_{A_h}) = id_{A_h} = \mu_h \circ (id_{A_h} \tilde{\otimes} \eta_h) \\
(id_{A_h} \tilde{\otimes} \Delta_h) \circ \Delta_h = (\Delta_h \tilde{\otimes} id_{A_h}) \circ \Delta_h \\
(\varepsilon_h \tilde{\otimes} id_{A_h}) \circ \Delta_h = id_{A_h} = (id_{A_h} \tilde{\otimes} \varepsilon_h) \circ \Delta_h \\
\Delta_h \circ \mu_h = (\mu_h \tilde{\otimes} \mu_h) \circ (id_{A_h} \tilde{\otimes} \tau_h \tilde{\otimes} id_{A_h}) \circ (\Delta_h \tilde{\otimes} \Delta_h) \\
\varepsilon_h \circ \mu_h = \varepsilon_h \cdot \varepsilon_h \\
\mu_h \circ (S_h \tilde{\otimes} id_{A_h}) \circ \Delta_h = \mu_h \circ (id_{A_h} \tilde{\otimes} S_h) \circ \Delta_h = \eta_h \circ \varepsilon_h
\end{cases}$$

où $\tau_h : A_h \tilde{\otimes} A_h \to A_h \tilde{\otimes} A_h$ défini par $\tau_h(a \otimes b) = b \otimes a$ pour tout $a, b \in A$.

2. *Un morphisme $f_h : (A_h, \mu_h, \eta_h, \Delta_h, \varepsilon_h, S_h) \to (A'_h, \mu'_h, \eta'_h, \Delta'_h, \varepsilon'_h, S'_h)$ d'algèbres de Hopf topologiques est une application K-linéaire telle que*

$$f_h \circ \mu_h = \mu'_h \circ (f_h \tilde{\otimes} f_h), \;\; (f_h \tilde{\otimes} f_h) \circ \Delta_h = \Delta'_h \circ f_h, \;\; f_h \circ \eta_h = \eta'_h, \;\; \varepsilon'_h \circ f_h = \varepsilon_h, \;\; f_h \circ S_h = S'_h \circ f_h.$$

On pourra adapter cette définition pour les notions d'algèbres, de cogèbres et de bigèbres topologiques.

2 Déformations formelles

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 13 1. *Une déformation d'algèbre de Hopf $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ sur un corps k est une algèbre de Hopf topologique $(A_h, \mu_h, \eta_h, \Delta_h, \varepsilon_h, S_h)$ sur l'algèbre K telle que :*

   (a) A_h est isomorphe à $A[[h]]$ comme K-module.

   (b) $\mu_h \equiv \mu \pmod h$ et $\Delta_h \equiv \Delta \pmod h$.

2. *Deux déformations A_h et A'_h sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $f_h : A_h \to A'_h$ d'algèbres de Hopf topologiques égal à l'identité $\pmod h$.*

Si $f_h : A_h \to A'_h$ est une équivalence, on écrira $A'_h = f_h * A_h$. Remarquons que $g_h * (f_h * A_h) = (g_h f_h) * A_h$.

De manière analogue, on peut définir la notion de déformation d'algèbre, de cogèbre ou de bigèbre.

Remarques. Comme μ_h et Δ_h sont des applications K-linéaires, on sait avec le deuxième point de la proposition 8 qu'elles sont déterminées par leurs restrictions à $A \otimes A$ et A. Alors $\forall a, a' \in A$,

$$\begin{aligned} \mu_h(a \otimes a') &= \mu(a \otimes a') + \mu_1(a \otimes a')h + \mu_2(a \otimes a')h^2 + \dots \\ \Delta_h(a) &= \Delta(a) + \Delta_1(a)h + \Delta_2(a)h^2 + \dots \end{aligned}$$

où $\mu_i : A \otimes A \to A$, $\Delta_i : A \to A \otimes A$ sont des applications k-linéaires. Dans la suite, notons $\mu_0 = \mu$ et $\Delta_0 = \Delta$. On a alors les deux formules suivantes :

$$\mu_h\left(\sum_p a_p h^p, \sum_q b_q h^q\right) = \sum_n \left(\sum_{p+q+r=n} \mu_r(a_p, b_q)\right) h^n,$$
$$\Delta_h\left(\sum_p a_p h^p\right) = \sum_n \left(\sum_{p+q=n} \Delta_p(a_q)\right) h^n.$$

Définition 14 *On appelle déformation formelle constante la déformation formelle de A obtenue simplement en étendant par K-linéarité les morphismes de structure de A, c'est-à-dire en prenant $\mu_n = 0$, $\Delta_n = 0$, $\forall n \geq 1$.*

Une déformation formelle est dite triviale si elle est équivalente à la déformation formelle constante.

Remarquons que dans la définition 13 on ne mentionne pas la notion d'unité, de counité et d'antipode de A_h. Ceci est justifié par les deux propositions suivantes :

Proposition 15 *Supposons ici que A est une algèbre.*

1. *L'élément unité 1 de A est aussi élément unité pour une déformation formelle (A_h, μ_h) si et seulement si $\forall n > 0$, $\forall a \in A$,*

$$\mu_n(a \otimes 1) = \mu_n(1 \otimes a) = 0.$$

L'analogue de $\eta : k \to A$ est alors l'application $\eta_h : K \to A_h$ définie par :

$$\eta_h\left(\sum_n a_n h^n\right) = \sum_n a_n.1h^n.$$

2. *Dans la situation de 1., tout élément inversible de A est aussi inversible dans A_h.*
3. *Toute déformation formelle (A_h, μ_h) est équivalente à une déformation formelle (A'_h, μ'_h) ayant même élément unité que A. Autrement dit, toute déformation formelle est équivalente à une déformation formelle où l'unité est obtenue simplement en étendant par K-linéarité.*

Preuve. Le premier point est immédiat.

Pour le second point : Soit a un élément inversible de A. Définissons des éléments u_h et v_h de $End_K(A_h) = (End(A))_h$ par

$$u_h(x_h) = \mu_h(a \tilde{\otimes} x_h), \qquad v_h(x_h) = \mu_h(x_h \tilde{\otimes} a).$$

Ces éléments sont inversibles car u_0 et v_0 sont inversibles.

Il reste à démontrer la troisième assertion. L'égalité $f_h \circ \mu_h = \mu'_h \circ (f_h \tilde{\otimes} f_h)$ s'écrit $\forall n \geq 0$

$$\sum_{p+q+r=n} \mu'_p(f_q(a) \otimes f_r(b)) = \sum_{p+q=n} f_p(\mu_q(a \otimes b),$$

où $a, b \in A$ et $f_0 = id_A$.

En posant $f_p = 0$, $\forall p = 1, \dots, n-1$, on a

$$\mu'_n(a \otimes b) = f_n(ab) + \mu_n(a \otimes b) - af_n(b) - f_n(a)b. \tag{3}$$

En prenant $b = c = 1$, puis $a = b = 1$ dans l'égalité (5) à suivre,

$$\mu_n(a \otimes 1) = a\mu_n(1 \otimes 1), \qquad \mu_n(1 \otimes a) = \mu_n(1 \otimes 1)a. \tag{4}$$

Transformons μ_h par un isomorphisme f_h vérifiant $f_1(1) = \mu_1(1 \otimes 1)$ et $f_n = 0$, $\forall n > 1$. Alors (3) et (4) impliquent

$$\mu'_1(a \otimes 1) = -a\mu_1(1 \otimes 1) + a\mu_1(1 \otimes 1) = 0,$$

et de la même façon $\mu'_1(1 \otimes a) = 0$.

En procédant par récurrence, supposons $\mu_n(a \otimes 1) = \mu_n(1 \otimes a) = 0$, pour $n = 1, \dots, m-1$. Transformons μ_h par un isomorphisme f_h vérifiant $f_m(1) = \mu_m(1 \otimes 1)$, $f_n = 0$, $\forall n \neq m$. Alors (3) et (4) impliquent

$$\mu'_n(a \otimes 1) = \mu'_n(1 \otimes a) = 0,$$

pour tout $n \in \{1, \dots, m\}$.

Il suffit enfin de remarquer que le produit $(1 + f_n h^n) \dots (1 + f_1 h)$ converge lorsque n tend vers l'infini. $\square$

Il existe une propriété analogue dans le cas des cogèbres.

Proposition 16 *Si une bigèbre A est une algèbre de Hopf d'antipode S, toute déformation formelle de A comme bigèbre est équivalente à une autre déformation formelle qui est une algèbre de Hopf en ce sens qu'il existe un élément S_h de $End_K(A_h)$ vérifiant $\mu_h \circ (S_h \tilde{\otimes} id_{A_h}) \circ \Delta_h = \mu_h \circ (id_{A_h} \tilde{\otimes} S_h) \circ \Delta_h = \eta_h \circ \varepsilon_h$.*

Preuve. On peut supposer que A_h admet les mêmes unité et counité que A. Considérons l'algèbre $End(A)$ munie du produit $u * v = \mu \circ (u \otimes v) \circ \Delta$. De la même façon, $End_K(A_h)$ est une algèbre pour le produit $u_h *_h v_h = \mu_h \circ (u_h \tilde{\otimes} v_h) \circ \Delta_h$, et c'est une déformation formelle de $End(A)$. On vérifie que $\eta \circ \varepsilon$ est encore unité pour la déformation formelle (en étendant par K-linéarité). Enfin, id_{A_h} est inversible dans $(End(A))_h = End_K(A_h)$ car id_A l'est dans $End(A)$ (en utilisant la proposition 15). $\square$

La condition d'associativité pour μ_h s'écrit, $\forall a, b, c \in A$,

$$\sum_{p+q=n} \mu_p(\mu_q(a \otimes b) \otimes c) - \mu_p(a \otimes \mu_q(b \otimes c)) = 0. \tag{5}$$

La composante d'ordre 1 donne

$$\mu_1(ab \otimes c) + \mu_1(a \otimes b)c = a\mu_1(b \otimes c) + \mu_1(a \otimes bc). \tag{6}$$

De même, la condition de coassociativité pour Δ_h s'écrit, $\forall a \in A$,

$$\sum_{p+q=n} (\Delta_p \otimes id_A - id_A \otimes \Delta_p) \circ \Delta_q(a) = 0. \tag{7}$$

La composante de degré 1 donne

$$(\Delta \otimes id_A) \circ \Delta_1(a) + (\Delta_1 \otimes id_A) \circ \Delta(a) = (id_A \otimes \Delta) \circ \Delta_1(a) + (id_A \otimes \Delta_1) \circ \Delta(a). \tag{8}$$

Enfin, la condition que Δ_h est un morphisme d'algèbres s'écrit, $\forall a, b \in A$,

$$\sum_{p+q=n} \Delta_p \circ \mu_q(a \otimes b) = \sum_{p+q+r+s=n} (\mu_p \otimes \mu_q) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta_r \otimes \Delta_s)(a \otimes b), \tag{9}$$

où $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ est l'application *volte* vérifiant, $\forall a, b \in A$, $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. La composante de degré 1 donne

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_1(a \otimes b)) + \Delta_1(ab) &= (\mu \otimes \mu_1 + \mu_1 \otimes \mu) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta \otimes \Delta)(a \otimes b) \\ &\quad + \Delta_1(a)\Delta(b) + \Delta(a)\Delta_1(b). \end{aligned} \tag{10}$$

Une paire d'applications k-linéaires (μ_1, Δ_1) est appelée une déformation $(mod\ h^2)$, ou encore une déformation infinitésimale, de A si elle satisfait à (6), (8) et (10). Plus généralement, un $2n$-uplet $(\mu_1, \dots, \mu_n, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ d'applications k-linéaires est une déformation $(mod\ h^{n+1})$ de A si les relations (5), (7) et (9) sont vraies $(mod\ h^{n+1})$.

Toute déformation de A induit une déformation $(mod\ h^{n+1})$ pour tout n. Par contre, une déformation $(mod\ h^{n+1})$ ne s'étend pas en général à une véritable déformation.

La condition pour qu'un isomorphisme de K-modules $f_h : A_h \to A'_h$ soit une équivalence de déformations est :

$$\mu'_h = f_h \circ \mu \circ (f_h^{-1} \tilde{\otimes} f_h^{-1}), \qquad \Delta'_h = (f_h \tilde{\otimes} f_h) \circ \Delta \circ f_h^{-1}.$$

En considérant le terme de degré 1, on obtient :

$$\mu'_1(a \otimes b) = \mu_1(a \otimes b) + f_1(ab) - af_1(b) - f_1(a)b, \tag{11}$$

$$\Delta'_1(a) = \Delta_1(a) - \Delta(f_1(a)) + (f_1 \otimes id_A + id_A \otimes f_1) \circ \Delta(a) \tag{12}$$

Deux déformations $(mod\ h^2)$ de A, notées (μ_1, Δ_1) et (μ'_1, Δ'_1), sont dites équivalentes si il existe un morphisme de k-module $f_1 : A \to A$ vérifiant (11) et (12).

2.2 Théorie cohomologique

Les relations du paragraphe précédent suggèrent la définition suivante de cohomologie d'algèbres de Hopf, qui est modellisée par la cohomologie de Hochschild d'algèbres associatives.

Pour $i, j \geq 1$, définissons l'espace des (i, j)-cochaînes d'une algèbre de Hopf A par $C^{i,j} = Hom_k(A^{\otimes i}, A^{\otimes j})$ et les morphismes de k-modules $d'_{ij} : C^{i,j} \to C^{i+1,j}$ et $d''_{ij} : C^{i,j} \to C^{i,j+1}$ par (en omettant les indices i, j)

$$\begin{aligned} (d'\gamma)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i+1}) &= \Delta^{(j)}(a_1)\gamma(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{i+1}) \\ &\quad + \textstyle\sum_{r=1}^{i} (-1)^r \gamma(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{r-1} \otimes a_r a_{r+1} \otimes \ldots \otimes a_{i+1}) \\ &\quad + (-1)^{i+1} \gamma(a_1 \otimes \ldots \otimes a_1)\Delta^{(j)}(a_{i+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d''\gamma)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i) &= (\mu^{(i)} \otimes \gamma)(\Delta_{1,i+1}(a_1)\Delta_{2,i+2}(a_2) \ldots \Delta_{i,2i}(a_i)) \\ &\quad + \textstyle\sum_{r=1}^{j} (-1)^r (id^{\otimes r-1} \otimes \Delta \otimes id^{\otimes j-r})(\gamma(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i)) \\ &\quad + (-1)^{j+1} (\gamma \otimes \mu^{(i)})(\Delta_{1,i+1}(a_1)\Delta_{2,i+2}(a_2) \ldots \Delta_{i,2i}(a_i)), \end{aligned}$$

où $\mu^{(i)}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i) = a_1 \ldots a_i$, $\Delta^{(j)}(a) = (id \otimes \ldots \otimes id \otimes \Delta) \circ \ldots \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta(a)$, avec $j-1$ Δ, et $\Delta_{k,i+k}(a)$ est un élément de $A^{\otimes 2i}$ avec que des 1 sauf le k-ième et le $(i+k)$-ième qui sont les composantes de $\Delta(a)$.

Le résultat suivant est laissé au lecteur.

Proposition 17 *$(C^{\bullet,\bullet}, d'_\bullet, d''_\bullet)$ est un bicomplexe, c'est-à-dire que*

$$d' \circ d' = d'' \circ d'' = d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0.$$

Posons $d_n = \sum_{i+j=n+1} d'_{ij} + (-1)^i d''_{ij}$ et $C^n = \oplus_{i+j=n+1} C^{i,j}$ l'ensemble des n-cochaînes. Alors $d_n : C^n \to C^{n+1}$ et $(C^\bullet, d_\bullet)$ est un complexe. On pose :

– $Z^n(A) = Ker(d_n)$ l'ensemble des n-cocycles,
– $B^n(A) = Im(d_{n-1})$ l'ensemble des n-cobords, nul pour $n = 0$.

$d_{n+1} \circ d_n = 0$, donc $B^n(A) \subseteq Z^n(A)$, et on pose alors $H^n(A) = Z^n(A)/B^n(A)$ le n-ième groupe cohomologique (qui est un k-module).

Remarques.

1. Soit $f_1 \in C^{1,1}$. Alors :

$$d'(f_1)(a_1 \otimes a_2) = a_1 f_1(a_2) + f_1(a_1)a_2 - f_1(a_1 a_2)$$
$$d''(f_1)(a) = (f_1 \otimes id + id \otimes f_1) \circ \Delta(a) - \Delta(f_1(a))$$

En comparant avec (11) et (12), on voit qu'une déformation ($mod\ h^2$) (μ_1, Δ_1) est triviale si et seulement si c'est un 2-cobord.

2. $\forall \mu_1 \in C^{2,1}$ et $\Delta_1 \in C^{1,2}$,

$$\begin{aligned}
&d'(\mu_1)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a_1\mu_1(a_2 \otimes a_3) - \mu_1(a_1a_2 \otimes a_3) + \mu_1(a_1 \otimes a_2a_3) - \mu_1(a_1 \otimes a_2)a_3,\\
&d''(\mu_1)(a_1 \otimes a_2) = (\mu \otimes \mu_1 + \mu_1 \otimes \mu) \circ (\Delta_{13}(a_1)\Delta_{24}(a_2)) - \Delta(\mu_1(a_1 \otimes a_2)),\\
&d'(\Delta_1)(a_1 \otimes a_2) = \Delta_1(a_1)\Delta(a_2) - \Delta_1(a_1a_2) + \Delta(a_1)\Delta_1(a_2),\\
&d''(\Delta_1)(a) = (id \otimes \Delta_1) \circ \Delta(a) - (\Delta \otimes id) \circ \Delta_1(a) + (id \otimes \Delta) \circ \Delta_1(a) - (\Delta_1 \otimes id) \circ \Delta(a).
\end{aligned}$$

En comparant avec (6), (8), (10), on observe que (μ_1, Δ_1) est une déformation ($mod\ h^2$) de A si et seulement si c'est un 2-cocycle.

Ainsi, on a prouvé la :

Proposition 18 *Soit A une algèbre de Hopf sur un corps k. Il y a une bijection naturelle entre $H^2(A)$ et l'ensemble des classes d'équivalences des déformations ($mod\ h^2$) de A.*

Proposition 19 *Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition précédente, si $H^2(A) = 0$, toute déformation de A est triviale.*

Preuve. Avec la proposition 18, si $H^2(A) = 0$, toute déformation A_h de A est triviale ($mod\ h^2$) ; nous devons montrer que A_h est triviale.

On écrit la multiplication et la comultiplication de A_h comme dans la remarque qui suit la définition 13. Choisissons une 1-cochaine $f^{(1)} : A \to A$ telle que $d(f^{(1)}) = (\mu_1, \Delta_1)$. Soit $A'_h = (id + hf^{(1)}) * A_h$. Alors $\mu'_1 = 0$ et $\Delta'_1 = 0$. En répétant les calculs, avec (6), (8), (10), (en regardant le terme en h^2), on voit que (μ'_2, Δ'_2) est encore un 2-cocycle. C'est donc un 2-cobord. Choisissons une 1-cochaine $f^{(2)}$ telle que $d(f^{(2)}) = (\mu'_2, \Delta'_2)$ et définissons une déformation $A''_h = (id + h^2 f^{(2)}) * A'_h$. Alors $\mu''_1 = \mu''_2 = 0$ et $\Delta''_1 = \Delta''_2 = 0$. Ce procédé s'itère. Soit $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ une suite de 1-cochaînes obtenue par itération de ce procédé, et soit :

$$A_h^\infty = (\ldots(id + h^n f^{(n)})\ldots(id + h^2 f^{(2)})(id + hf^{(1)})) * A_h.$$

Remarquons que ce produit a un sens comme élément de A_h pour la topologie h-adique. Alors A_h^∞ est la déformation constante ce qui termine la preuve. □

Remarques. La théorie cohomologique des algèbres de Hopf que nous avons défini est calquée sur la cohomologie de Hochschild des algèbres et des cogèbres. La cohomologie $H^\bullet_{alg}(A)$ de A comme algèbre est basée sur le complexe $(C^{\bullet,1}, d'_\bullet)$, la cohomologie $H^\bullet_{cog}(A)$ de A comme cogèbre est basée sur le complexe $(C^{1,\bullet}, d''_\bullet)$. On déduit de la preuve de la proposition 19 le

Corollaire 20 *Si $H^2_{alg}(A) = 0$ (resp. si $H^2_{cog}(A) = 0$), toute déformation de A est isomorphe à $A[[h]]$ comme algèbre (resp. cogèbre).*

L'"espace" des vraies déformations d'une algèbre de Hopf A est généralement plus petit que l'espace $H^2(A)$ des déformations $(mod\ h^2)$. En fait, si (μ_1, Δ_1) s'étend en une vraie déformation de A, ou juste en une déformation $(mod\ h^3)$, alors le terme d'ordre 2 dans (5), (7), (9) donne respectivement

$$\begin{aligned}
d'(\mu_2)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &= \mu_1(\mu_1(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) - \mu_1(a_1 \otimes \mu_1(a_2 \otimes a_3)),\\
-d''(\Delta_2)(a) &= (id \otimes \Delta_1) \circ \Delta_1(a) - (\Delta_1 \otimes id) \circ \Delta_1(a),\\
(d'(\Delta_2) + d''(\mu_2))(a_1 \otimes a_2) &= \Delta_1(\mu_1(a_1 \otimes a_2)) - (\mu_1 \otimes \mu_1)(\Delta^{13}(a_1)\Delta^{24}(a_2)) - \Delta_1(a_1)\Delta_1(a_2)\\
&\quad -(\mu \otimes \mu_1 + \mu_1 \otimes \mu)(\Delta_1^{13}(a_1)\Delta^{24}(a_2) + \Delta^{13}(a_1)\Delta_1^{24}(a_2).
\end{aligned}$$

On peut voir sans difficulté que les termes de droite de ces équations définissent, pour tout 2-cocycle (μ_1, Δ_1), un 3-cocycle dont la classe de cohomologie dépend seulement de la classe de (μ_1, Δ_1). Les formules (5) et (7) pour $n = 2$ montrent que les termes de droite doivent être un 3-cobord (pour que ce soit une déformation $(mod\ h^3)$), ce qu'on exprime en disant qu'il y a une obstruction dans $H^3(A)$. Si les termes de droite sont un 3-cobord, on peut déterminer (μ_2, Δ_2) (à un 2-cocycle près) ; pour déterminer (μ_3, Δ_3), on se heurte de nouveau à une obstruction dans $H^3(A)$, et ainsi de suite.

Dans le cas général, si on a une déformation $(mod\ h^n)$ de A, l'obstruction qui s'étend en une déformation $(mod\ h^{n+1})$ est encore un élément de $H^3(A)$. En particulier,

Proposition 21 *Si $H^3(A) = 0$, toute déformation $(mod\ h^n)$ de A, pour $n \geq 2$, s'étend en une vraie déformation de A.*

Malheureusement, pour beaucoup d'algèbres de Hopf, $H^3(A)$ est non nul et la question de savoir si une déformation $(mod\ h^n)$ s'étend est souvent non triviale.

Intéressons nous plus particulièrement aux déformations de l'algèbre enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour ces algèbres de Hopf, $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ est non nul en général, donc des déformations non triviales sont possibles.

Définition 22 *Une déformation d'algèbre de Hopf de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est appelée une algèbre enveloppante quantifiée, notée $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$.*

Le résultat suivant montre que, dans la construction des algèbres enveloppantes quantifiées dans le cas semi-simple, on peut supposer d'emblée que la structure d'algèbre est inchangée :

Théorème 23 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps k de caractéristique nulle. Alors, en notant $\wedge^m(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ le sous-espace de $\wedge^m(\mathfrak{g})$ composé des éléments invariants par l'action adjointe de $\mathfrak{g}$,*

$$H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong \wedge^2(\mathfrak{g}), \quad H^3(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong \wedge^3(\mathfrak{g})/\wedge^3(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, \quad H^2_{alg}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = 0.$$

Par conséquent, toute déformation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[h]]$ comme algèbre.

2.3 Structure de Poisson

Définition 24 *Une algèbre de co-Poisson sur un corps k est une cogèbre cocommutative (A, ε, Δ) muni d'un co-crochet de Poisson $\delta : A \to A \otimes A$ k-linéaire et anti-symétrique telle que*

1. *la composition*

$$A \xrightarrow{\delta} A \otimes A \xrightarrow{\delta \otimes id} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\text{c.p.}} A \otimes A \otimes A$$

est nulle, où c.p. est la somme sur les permutations circulaires des facteurs dans le produit tensoriel triple (c'est l'identité de co-Jacobi).

2. *l'identité de co-Leibniz*

$$(\Delta \otimes id) \circ \delta = (id \otimes \delta) \circ \Delta + \sigma_{23} \circ (\delta \otimes id) \circ \Delta$$

est vérifiée, où σ_{23} est la permutation des deuxième et troisième facteurs dans le produit tensoriel triple.

Une algèbre de co-Poisson-Hopf est une algèbre de co-Poisson $(A, \varepsilon, \Delta, \delta)$ qui est aussi une algèbre de Hopf $(A, \eta, \mu, \varepsilon, \Delta, S)$ avec la compatibilité :

$$\forall a_1, a_2 \in A,\ \delta(a_1 a_2) = \delta(a_1)\Delta(a_2) + \Delta(a_1)\delta(a_2). \tag{13}$$

Définition 25 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.*

Une structure de bigèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ est une application linéaire $\delta_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, anti-symmétrique, appelée cocommutateur, telle que

- $\delta_{\mathfrak{g}}^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ *est un crochet de Lie sur* $\mathfrak{g}^*$,
- $\delta_{\mathfrak{g}}$ *est un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, c'est-à-dire $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$*

$$\delta_{\mathfrak{g}}([X,Y]) = (ad_X \otimes id + id \otimes ad_X) \circ \delta(Y) - (ad_Y \otimes id + id \otimes ad_Y) \circ \delta(X).$$

Un homomorphisme de bigèbre de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie tel que $(\varphi \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathfrak{g}} = \delta_{\mathfrak{h}} \circ \varphi$.

Supposons comme dans la définition précédente que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie. Parmi les 1-cocycles de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, on définit les 1-cobords, pour lesquels

$$\delta(X) = X.r = (ad_X \otimes id + id \otimes ad_X)(r), \tag{14}$$

pour certains $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, et $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Définition 26 *Une bigèbre de Lie cobord est une bigèbre de Lie dont le cocommutateur est un 1-cobord.*

Introduisons quelques notations utilisées dans la proposition suivante. Soit $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $r = \sum_i a_i \otimes b_i$ avec $a_i, b_i \in \mathfrak{g}$. Alors on note

$$\begin{aligned}
r_{12} &= r, \\
r_{21} &= \sum_i b_i \otimes a_i, \\
[r_{12}, r_{13}] &= \sum_{i,j} [a_i, a_j] \otimes b_i \otimes b_j, \\
[r_{12}, r_{23}] &= \sum_{i,j} a_i \otimes [b_i, a_j] \otimes b_j, \\
[r_{13}, r_{23}] &= \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes [b_i, b_j].
\end{aligned}$$

Proposition 27 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. L'application δ définie par (14) est le cocommutateur d'une structure de bigèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $r_{12} + r_{21}$ *est un élément $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$,*
2. $[|r, r|] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]$ *est $\mathfrak{g}$-invariant dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.*

Définition 28 *L'équation de Yang-Baxter classique est*

$$[|r, r|] = 0.$$

Une solution de cette équation est appelée une r-matrice.

Une bigèbre de Lie est dite quasi-triangulaire si la structure de bigèbre de Lie provient d'une solution de l'équation de Yang-Baxter classique, et triangulaire si cette solution est anti-symmétrique (c'est-à-dire $r_{12} = -r_{21}$).

Pour le cas des algèbres de Hopf, il existe aussi une notion de R-matrice :

Définition 29 *Une algèbre de Hopf A sur un corps k est dite quasi-cocommutative s'il existe un élément inversible $R \in A \otimes A$ tel que, $\forall a \in A$,*

$$\Delta^{op}(a) = R\Delta(a)R^{-1}.$$

Remarques Si A est une algèbre de Hopf topologique sur $k[[h]]$, nous dirons que A est topologiquement quasi-cocommutative si il existe un élément R dans la complétion h-adique de $A \otimes A$ ayant les propriétés de la définition précédente.

Soit $R = \sum_i R'_i \otimes R''_i \in A \otimes A$. Posons

– R_{12} et R_{21} les éléments de $A \otimes A$ définis par

$$\begin{aligned} R_{12} &= R, \\ R_{21} &= \sum_i R''_i \otimes R'_i, \end{aligned}$$

– R_{12}, R_{23}, R_{13} les éléments de $A \otimes A \otimes A$ définis par

$$\begin{aligned} R_{12} &= \sum_i R'_i \otimes R''_i \otimes 1 = R \otimes 1, \\ R_{23} &= \sum_i 1 \otimes R'_i \otimes R''_i = 1 \otimes R, \\ R_{13} &= \sum_i R'_i \otimes 1 \otimes R''_i. \end{aligned}$$

Définition 30 *Une algèbre de Hopf quasi-cocommutative (A, R) est dite*

1. *cobord si les conditions suivantes sont satisfaites :*
   (a) $R_{12}(\Delta \otimes id)(R) = R_{23}(id \otimes \Delta)(R)$,
   (b) $R_{21} = R^{-1}$,
   (c) $(\varepsilon \otimes \varepsilon)(R) = 1$.
2. *quasi-triangulaire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
   (a) $(\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$,
   (b) $(id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$.
3. *triangulaire si elle est quasi-triangulaire et $R_{21} = R^{-1}$.*

Si A est quasi-triangulaire, l'élément R est appelé la R-matrice universelle de A.

Proposition 31 *Soit (A, R) une algèbre de Hopf quasi-triangulaire. Alors,*

$$\begin{cases} R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \\ (\varepsilon \otimes id)(R) = 1 = (id \otimes \varepsilon)(R), \\ (S \otimes id)(R) = R^{-1} = (id \otimes S)(R), \\ (S \otimes S)(R) = R. \end{cases}$$

En particulier, triangulaire implique cobord.

Proposition 32 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle. Si $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ a une structure de co-Poisson δ, telle que $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \delta)$ est une algèbre de co-Poisson-Hopf, alors $\delta(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ et $\delta_{|\mathfrak{g}}$ muni $\mathfrak{g}$ d'une structure de bigèbre de Lie. Réciproquement, toute structure de bigèbre de Lie $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ s'étend uniquement en un co-crochet de Poisson sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de co-Poisson-Hopf.*

Preuve. Soit $\delta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un co-crochet de Poisson sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Montrons que $\delta(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$, $\delta(x) = \sum_i x_i' \otimes x_i''$ où $x_i', x_i'' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On peut supposer que les x_i'' sont linéairement indépendants. Avec l'identité de co-Leibniz,

$$\sum_i \Delta(x_i') \otimes x_i'' = 1 \otimes \delta(x) + x \otimes \delta(1) + \sigma_{23} \circ (\delta(x) \otimes 1 + \delta(1) \otimes x).$$

En prenant $a_1 = a_2 = 1$ dans (13), on obtient que $\delta(1) = 0$, donc

$$\sum_i \Delta(x_1') \otimes x_i'' = \sum_i (x_i' \otimes 1 + 1 \otimes x_i') \otimes x_i''.$$

Ainsi, les éléments x_i' sont primitifs dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Donc $\delta(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Comme δ est anti-symmétrique, $\delta(\mathfrak{g}) \subseteq (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})) \bigcap (\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Montrons que $\delta_{|\mathfrak{g}}$ est un 1-cocycle. Soit $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} \delta([x_1, x_2]) &= \delta(x_1 x_2 - x_2 x_1), \\ &= [\Delta(x_1), \delta(x_2)] - [\Delta(x_2), \delta(x_1)], \\ &= x_1 \cdot \delta(x_2) - x_2 \cdot \delta(x_1), \end{aligned}$$

en utilisant (13) à la deuxième égalité, et où $\cdot$ est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.
Enfin, l'identité de Jacobi pour δ^* est équivalente à l'identité de co-Jacobi pour δ.

La réciproque se prouve avec les mêmes arguments, en utilisant (13) pour étendre δ de $\mathfrak{g}$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. □

Définition 33 *Soit A une algèbre de co-Poisson-Hopf cocommutative sur un corps k de caractéristique nulle, et soit δ le co-crochet de Poisson. Une quantification de A est une déformation d'algèbre de Hopf A_h de A telle que*

$$\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{op}(a)}{h} \ (mod\ h),$$

où $x \in A$ et a est un élément de A_h tel que $x \equiv a\ (mod\ h)$.

Une quantification d'une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \delta)$ est une quantification $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ muni de sa structure d'algèbre de co-Poisson-Hopf donnée à la proposition 32. Réciproquement, $(\mathfrak{g}, \delta)$ est appelée la limite classique de l'algèbre enveloppante quantifiée $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$.

Remarques.

1. Notons que cette définition à un sens car $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est cocommutative, $\Delta_h(a) \equiv \Delta_h^{op}(a)\ (mod\ h)$. De plus, cette condition ne dépend que du comportement de Δ_h jusqu'à l'ordre h, il est donc logique de discuter des déformations $(mod\ h^n)$, pour tout $n \geq 2$.
2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est uniquement déterminée par l'algèbre enveloppante quantifiée $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$, c'est l'ensemble des éléments primitifs de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})/h\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$.

Le résultat suivant montre qu'une quantification d'une bigèbre de Lie est la même chose qu'une algèbre enveloppante quantifiée.

Proposition 34 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps k de caractéristique nulle et soit $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ une déformation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Soit $\delta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ défini par*

$$\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{op}(a)}{h} \ (mod\ h),$$

où $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $a \in \mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ tel que $x \equiv a[h]$. Alors $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \delta)$ est une algèbre de co-Poisson-Hopf.

Preuve. Il est clair que δ est bien défini. Montrons que δ satisfait la première condition de la définition 24, les deux autres conditions sont laissées au lecteur. On a

$$\begin{aligned}(\delta \otimes id) \circ \delta(x) &= \frac{1}{h^2}\big((\Delta_h \otimes id) \circ \Delta_h(a) - (\Delta_h^{op} \otimes id) \circ \Delta_h(a) \\ &\quad -(\Delta_h \otimes id) \circ \Delta_h^{op}(a) + (\Delta_h^{op} \otimes id) \circ \Delta_h^{op}(a)\big) \ (mod\ h).\end{aligned}$$

En notant $(\Delta_h \otimes id) \circ \Delta_h(a) = \sum_i a_i \otimes a_i' \otimes a_i''$,

$$\begin{aligned}(\Delta_h^{op} \otimes id) \circ \Delta_h(a) &= \sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'', \\ (\Delta_h \otimes id) \circ \Delta_h^{op}(a) &= \sum_i a_i' \otimes a_i'' \otimes a_i, \\ (\Delta_h^{op} \otimes id) \circ \Delta_h^{op}(a) &= \sum_i a_i'' \otimes a_i' \otimes a_i.\end{aligned}$$

Le résultat est maintenant clair. □

Ce résultat a une interprétation cohomologique : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle, et soit $r \in \wedge^2(\mathfrak{g})$. L'application $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ donnée par $\delta(x) = (ad_x \otimes id + id \otimes ad_x)(r)$ s'étend uniquement en une application $\delta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ grâce à la formule (13). Alors $\Delta_1 = \delta$ est une déformation ($mod\ h^2$) de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En effet, (8) est équivalent à

$$((\Delta \otimes id) \circ \Delta(a)) \cdot ((\Delta \otimes id)(r) + r \otimes 1) = ((id \otimes \Delta) \circ \Delta(a)) \cdot ((id \otimes \Delta)(r) + 1 \otimes r).$$

Le terme en a dans les deux membres sont égaux par coassociativité de Δ, et ceux en r sont égaux en appliquant l'opérateur "c.p." à $r \otimes 1$.

Par la proposition 21 et le théorème 23, l'obstruction à étendre en une déformation ($mod\ h^3$) est un élément de $\wedge^3(\mathfrak{g})/\wedge^3(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Explicitement, cet élément est exactement $[|r, r|] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]$. En regardant la proposition 27, on voit que l'obstruction disparaît précisément lorsque $(\mathfrak{g}, \delta)$ est une bigèbre de Lie.

On peut également montrer le théorème suivant :

Théorème 35 *Toute bigèbre de Lie de dimension finie $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ sur un corps k de caractéristique nulle admet une quantification.*

Théorème 36 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie, et soit $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ une solution anti-symmétrique de l'équation de Yang-Baxter classique :*

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

Alors il existe une déformation $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dont la limite classique est $\mathfrak{g}$ avec la structure de bigèbre de Lie définie par r. Par ailleurs, $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf triangulaire et est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[h]]$ comme algèbre sur $\mathbb{R}[[h]]$.

Le résultat suivant montre que, bien que dans de nombreux cas on peut restreindre notre attention aux algèbres enveloppantes quantifiées qui ont la structure d'algèbre "usuelle", la structure de cogèbre doit être changée.

Théorème 37 *Soit $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ une algèbre enveloppante quantifiée cocommutative sur $k[[h]]$, où k est un corps de caractéristique nulle. Alors $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est isomorphe comme algèbre de Hopf topologique sur $k[[h]]$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_h)$, où $\mathfrak{g}_h$ est une déformation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Remarques. Ici $\mathfrak{g}_h$ est isomorphe comme $k[[h]]$-module à $\mathfrak{g}[[h]]$, et $\mathfrak{g}_h/h\mathfrak{g}_h \cong \mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie sur k. De plus, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_h)$ désigne la complétion h-adique de l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}_h$.

En particulier, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple complexe, toute déformation cocommutative de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est triviale, car toute déformation de $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie est triviale (voir [4]).

On dit qu'une algèbre enveloppante quantifiée $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est cobord, quasi-triangulaire ou triangulaire si il existe un élément $R_h \in \mathcal{U}_h(\mathfrak{g})\tilde{\otimes}\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ tel que $(\mathcal{U}_h(\mathfrak{g}), R_h)$ a ces propriétés comme algèbre de Hopf topologique et $R_h \equiv 1 \otimes 1$ $(mod\ h)$.

Proposition 38 *Soit $(\mathcal{U}_h(\mathfrak{g}), R_h)$ une algèbre enveloppante quantifiée cobord et définissons $r \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ par :*

$$r \equiv \frac{R_h - 1 \otimes 1}{h} \ (mod\ h).$$

Alors $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ et la limite classique de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est la bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \delta)$ définie par r, c'est-à-dire

$$\delta(x) = (ad_x \otimes id + id \otimes ad_x)(r),$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Par ailleurs, si $(\mathcal{U}_h(\mathfrak{g}), R_h)$ est quasi-triangulaire ou triangulaire, alors $(\mathfrak{g}, \delta)$ aussi.

3 Le groupe quantique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2, k))$

Dans tout ce qui suit, $car(k) = 0$. Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, k)$ admet pour base les éléments

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, $[X, Y] = H$.

Considérons $r = X \wedge Y = X \otimes Y - Y \otimes X$. r vérifie les conditions de la proposition 27, on peut donc définir sur $\mathfrak{sl}(2, k)$, avec (14), une structure de bigèbre de Lie δ, avec

$$\delta(H) = 0, \quad \delta(X) = X \wedge H, \quad \delta(Y) = Y \wedge H.$$

Soit $\mathfrak{b}^+$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{sl}(2, k)$ engendrée par $\{H, X\}$, et $\mathfrak{b}^-$ la sous-algèbre de Borel engendrée par $\{H, Y\}$. Nous allons quantifier les bigèbres de Lie $(\mathfrak{b}^\pm, \delta_{|\mathfrak{b}^\pm})$ pour en déduire une quantification de $(\mathfrak{sl}(2, k), \delta)$. Notons $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}^+ \bigcap \mathfrak{b}^-$.

Comme algèbre, une quantification de $\mathfrak{b}^+$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{b}^+)[[h]]$. Comme $\delta(H) = 0$, le choix

$$\Delta_h(H) = H\tilde{\otimes}1 + 1\tilde{\otimes}H \tag{15}$$

satisfait à la condition de la définition 33. Pour $\Delta_h(X)$, notons que $\mathcal{U}(\mathfrak{b}^+)$ est un espace vectoriel gradué, avec $deg(H) = 0$, $deg(X) = 1$, et que Δ préserve la graduation. Donc

$$\Delta_h(X) = X\tilde{\otimes}f + g\tilde{\otimes}X, \tag{16}$$

avec $f, g \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. La condition $\Delta_h \equiv \Delta \ (mod\ h)$ implique que $f, g \equiv 1 \ (mod\ h)$.

Pour tout choix de f et g, Δ_h défini par (15) et (16) s'étend en un morphisme d'algèbres

$$\Delta_h : \mathcal{U}(\mathfrak{b}^+)[[h]] \to \mathcal{U}(\mathfrak{b}^+)[[h]] \tilde{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{b}^+)[[h]] = \left(\mathcal{U}(\mathfrak{b}^+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{b}^+)\right)[[h]].$$

De plus, Δ_h coassociatif implique que f, g sont group-like.

Lemme 39 *Les éléments group-like f de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})[[h]]$ tels que $f \equiv 1 \ (mod\ h)$ sont précisément ceux de la forme $f = e^{h\mu H}$, avec $\mu \in k[[h]]$.*

Preuve. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\Delta_h(e^{h\mu H}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h\mu)^n}{n!}(H \otimes 1 + 1 \otimes H)^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \frac{(h\mu)^n}{n!} H^m \otimes H^{n-m}, \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h\mu)^{m+k}}{m!k!} H^m \otimes H^k, \\
&= e^{h\mu H} \tilde{\otimes} e^{h\mu H}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n H^n \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})[[h]]$ group-like, avec $f_n \in k[[h]]$. Par un calcul similaire au précédent, $f_{m+n} = f_m f_n$, $\forall m, n \geq 1$. En écrivant $f_1 = \mu h$, $f = e^{h\mu H}$. □

On peut donc supposer que $\Delta_h(X) = X \tilde{\otimes} e^{h\mu H} + e^{h\nu H} \tilde{\otimes} X$ avec $\mu, \nu \in k[[h]]$. En remplaçant X par $e^{h\nu H} X$, on peut supposer $\nu = 0$. Pour simplifier, choisissons $\mu = 1$, et alors

$$\Delta_h(X) = X \tilde{\otimes} e^{hH} + 1 \tilde{\otimes} X \tag{17}$$

(en fait, à un automorphisme de $k[[h]]$ près de la forme $h \mapsto h + O(h^2)$, c'est le seul choix possible). Posons alors

$$S_h(H) = -H, \quad S_h(X) = -Xe^{-hH}, \quad \varepsilon_h(H) = \varepsilon_h(X) = 0. \tag{18}$$

Alors on peut voir facilement que $\Delta_h, S_h, \varepsilon_h$ s'étendent en des homomorphismes d'algèbres (anti-homomorphisme pour S_h) et satisfont aux axiomes des algèbres de Hopf.

De même, $(\mathfrak{b}^-, \delta_{|\mathfrak{b}^-})$ peut être quantifiée de la même façon. Il y a aussi un choix pour définir $\Delta_h(Y)$, et le plus judicieux est de poser

$$\Delta_h(Y) = Y \tilde{\otimes} 1 + e^{-hH} \tilde{\otimes} Y. \tag{19}$$

L'antipode et la counité sont alors données par

$$S_h(H) = -H, \quad S_h(Y) = -e^{hH} Y, \quad \varepsilon_h(H) = \varepsilon_h(Y) = 0. \tag{20}$$

On définit alors la quantification $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$, égale à $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))[[h]]$ comme $k[[h]]$-module, avec la structure de cogèbre définit par (15), (17), (18), (19), (20). Nous devons choisir une structure d'algèbre telle que Δ_h soit un homomorphisme.

$$\begin{aligned}
\Delta_h([X,Y]) &= [X \tilde{\otimes} e^{hH} + 1 \tilde{\otimes} X, Y \tilde{\otimes} 1 + e^{-hH} \tilde{\otimes} Y] \\
&= [X,Y] \tilde{\otimes} e^{hH} + e^{-hH} \tilde{\otimes} [X,Y] + Xe^{-hH} \tilde{\otimes} e^{hH} Y - e^{-hH} X \tilde{\otimes} Y e^{hH}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Pour simplifier cette expression, utilisons le

Lemme 40 *Soit A une algèbre sur $k[[h]]$, $a, b, c \in A$. Supposons que a commute avec c. Alors*

1. *$e^{h(a+c)} = e^{ha}e^{hc}$.*
2. *Si $[a,b] = bc$, alors $e^{ha}be^{-ha} = be^{hc}$.*

Preuve. Le premier point est bien connu. Pour le second, $ab = b(a+c)$ et donc $a^n b = b(a+c)^n$. Alors

$$\begin{aligned} e^{ha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} a^n b \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} b(a+c)^n \\ &= be^{h(a+c)} = be^{hc}e^{ha}. \end{aligned}$$

□

Alors les deux derniers termes dans (21) s'éliminent, et donc

$$\Delta_h([X,Y]) = [X,Y]\tilde{\otimes}e^{hH} + e^{-hH}\tilde{\otimes}[X,Y]. \tag{22}$$

En comparant avec (15), on voit que la relation $[X,Y] = H$ doit être modifiée. Comme $e^{\pm hH}$ est group-like (avec le lemme 39), un multiple de $e^{hH} - e^{-hH}$ satisfait (22). Pour obtenir la bonne limite classique (voir la définition 33), on prend

$$[X,Y] = \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{e^h - e^{-h}}.$$

Ainsi, on a la

Définition 41 *L'algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ sur $k[[h]]$ est définie comme suit :*

Soit $P = k\{H,X,Y\}$ l'algèbre polynomiale non commutative en les trois générateurs H, X et Y, soit I l'idéal bilatère de $P[[h]]$ engendré par

$$[H,X] - 2X, \qquad [H,Y] + 2Y, \qquad [X,Y] - \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{e^h - e^{-h}}$$

et soit $\overline{I}$ l'adhérence de I pour la topologie h-adique.

Alors $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k)) = P[[h]]/\overline{I}$ comme algèbre sur $k[[h]]$.

Les morphismes de $k[[h]]$-algèbres

$$\begin{cases} \Delta_h : \mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k)) \to \mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))\tilde{\otimes}\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k)), \\ \varepsilon_h : \mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k)) \to k[[h]], \\ S_h : \mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k)) \to \mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k)), \end{cases}$$

(anti-morphisme dans le cas de S_h) donné par (15), (17), (18), (19), (20) définissent une structure d'algèbre de Hopf topologique sur $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$.

Par ailleurs, $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ est une algèbre enveloppante quantifiée dont la limite classique est la bigèbre de Lie définie par $r = X \wedge Y$.

Remarques.

1. Pour montrer que Δ_h s'étend bien en un morphisme d'algèbre, remarquons qu'il s'étend trivialement en un morphisme $P[[h]] \to P[[h]]\tilde{\otimes}P[[h]]$ et que

$$\Delta_h(I) \subseteq P[[h]]\tilde{\otimes}I + I\tilde{\otimes}P[[h]].$$

   Comme Δ_h est $k[[h]]$-linéaire, $\overline{I}$ est un idéal de Hopf de $P[[h]]$:

$$\Delta_h(\overline{I}) \subseteq P[[h]]\tilde{\otimes}\overline{I} + \overline{I}\tilde{\otimes}P[[h]].$$

2. Pour finir de prouver que $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ est une algèbre enveloppante quantifiée, on doit montrer qu'elle est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))[[h]]$ comme $k[[h]]$-module. Cela est donné par la proposition 44.

Dans la suite, les $-$ désigne les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))$ par opposition aux éléments de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$. Rappelons que l'élément de Casimir $\overline{\Omega}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))$ est donné par

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{4}(\overline{H}+1)^2 + \overline{YX} = \frac{1}{4}(\overline{H}-1)^2 + \overline{XY}.$$

Définition 42 *L'élément de Casimir quantique de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ est*

$$\begin{aligned}\Omega &= \left(\frac{sinh\left(\frac{1}{2}h(H+1)\right)}{sinh(h)}\right)^2 + YX \\ &= \left(\frac{sinh\left(\frac{1}{2}h(H-1)\right)}{sinh(h)}\right)^2 + XY.\end{aligned}$$

Proposition 43 *L'élément de Casimir quantique engendre (topologiquement) le centre de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$.*

En d'autres termes, la $k[[h]]$-sous-algèbre de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ engendré par Ω est dense dans le centre de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ pour la topologie h-adique. Pour le prouver, il suffit de montrer que Ω commute avec H, X et Y.

Proposition 44 *Il y a un isomorphisme $\varphi : \mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k)) \to \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))[[h]]$ de $k[[h]]$-algèbres tel que*

$$\varphi(H) = \overline{H}, \quad \varphi(Y) = \overline{Y}, \quad \varphi(X) = 2\left(\frac{cosh\left(h(\overline{H}-1)\right) - cosh\left(2h\sqrt{\overline{\Omega}}\right)}{\left((\overline{H}-1)^2 - 4\overline{\Omega}\right) sinh^2(h)}\right) X.$$

Remarques.

1. φ a un sens car, si u et v sont des indéterminées,
$$\frac{cosh(u) - cosh(v)}{u^2 - v^2}$$
peut être écrit comme une série formelle $f(u^2, v^2)$.
2. φ est égale à l'identité $(mod\ h)$.

Il existe un analogue au théorème de PBW.

Théorème 45 *Les monômes $Y^r H^s X^t$, pour $r, s, t \in \mathbb{N}$, forment une base topologique de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$.*

La limite classique de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ est une bigèbre de Lie quasi-triangulaire sur $\mathfrak{sl}(2,k)$, donc on peut s'attendre, compte tenu de la proposition 34, à ce que $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ soit lui-même une algèbre enveloppante quantifiée quasi-triangulaire (avec la proposition 38). Nous allons montrer que c'est effectivement le cas.

Pour cela, rappelons la notion de q-coefficient binomiale. Si q est une indéterminée, et $m \geq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, définissons :

$$\begin{aligned}[n]_q &= \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \\ [n]_q! &= [n]_q [n-1]_q \ldots [2]_q [1]_q, \\ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q &= \frac{[m]_q!}{[n]_q! [m-n]_q!}.\end{aligned}$$

Ces symboles définissent des éléments $\in \mathbb{Q}(q)$, et même à $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$. Par ailleurs, si $q = e^h$, $[n]_{e^h} \equiv n \ (mod\ h)$.

Proposition 46 *L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ est topologiquement quasi-triangulaire avec la R-matrice universelle*

$$R_h = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(h) e^{\frac{1}{2}h(H\otimes H)} X^n \tilde{\otimes} Y^n,$$

où $R_n(h) = \dfrac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!}$, *avec* $q = e^h$.

Remarquons que R_h est bien un élément inversible de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))\tilde{\otimes}\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ car $R_n(h) \equiv \dfrac{2^n h^n}{n!} \ (mod\ h^{n+1})$.

Corollaire 47 *L'élément R_h défini précédemment satisfait l'équation de Yang-Baxter quantique*

$$R_h^{12} R_h^{13} R_h^{23} = R_h^{23} R_h^{13} R_h^{12}.$$

Références

[1] Abe E., *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[2] Chari V. and Pressley N., *A guide to Quantum groups*, Cambridge University Press, 1994.

[3] Guichardet A., *Groupes quantiques, Introduction au point de vue formel*, Savoirs Actuels, 1995.

[4] Jacobson N., *Lie Algebras*, Dover Publ., New York, 1979.

[5] Kassel C., *Quantum groups*, Springer-Verlag, 1995.