

# Formule d'Andersen et algèbres de greffes

Anthony Mansuy

*Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims  
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France  
e-mail : anthony.mansuy@univ-reims.fr*

Juin 2012

Dans son article [Me], Frédéric Menous donne la démonstration d'une formule probabiliste, la formule d'Andersen. Cette démonstration combinatoire s'appuie sur un théorème de décomposition en arbre de certains coefficients. Nous rappelons ici la preuve de ce théorème de décomposition et pour cela nous introduisons un ensemble d'outils combinatoires. En particulier, nous définissons deux opérateurs de greffes  $B^+$  et  $B^-$  qui apparaissent naturellement dans cette preuve. Ces opérateurs nous permettent de définir deux algèbres  $\mathcal{B}^\infty$  et  $\mathcal{B}$ . En suivant l'article [Ma01], nous étudions les différentes propriétés de  $\mathcal{B}^\infty$  et  $\mathcal{B}$ .

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Formule d'Andersen</b>	<b>1</b>
1.1	Définitions et notations . . . . .	2
1.2	Décomposition en arbre de la famille $M$ . . . . .	2
1.2.1	Arbres enracinés, plans, décorrés, ordonnés . . . . .	2
1.2.2	Un ensemble de forêts ordonnées $\mathcal{G}$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Algèbres de greffes</b>	<b>7</b>
2.1	L'algèbre $\mathcal{B}^\infty$ . . . . .	7
2.1.1	Etude des ensembles $\mathcal{G}$ . . . . .	7
2.1.2	L'algèbre de Hopf $\mathcal{B}^\infty$ . . . . .	10
2.2	L'algèbre $\mathcal{B}$ . . . . .	12
2.2.1	Construction de $\mathcal{B}$ et premières propriétés . . . . .	12
2.2.2	Algèbre bigreffe . . . . .	16

## 1 Formule d'Andersen

Il existe une vaste littérature sur les marches aléatoires sur  $\mathbb{R}$  et, parmi les nombreux résultats, on peut en citer un, de E. Sparre Andersen, qui est basé sur des méthodes combinatoires.

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, équidistribuées, avec une densité de probabilité commune  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Nous pouvons définir la marche aléatoire associée, qui est la collection de variables aléatoires  $(S_n)_{n \geq 1}$  :

$$\forall n \geq 1; \quad S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Considérons les probabilités associées :

$$\forall n \geq 1; \quad \tau_n = P(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0, S_n > 0).$$

E. Sparre Andersen a alors montré que :

$$\log\left(\frac{1}{1-\tau(s)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n > 0) \quad \text{avec} \quad \tau(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n s^n.$$

Comme annoncé précédemment, nous donnons ici la preuve d'un théorème de décomposition en arbre sur lequel se base F. Menous (voir [Me]) pour démontrer la formule d'Andersen.

## 1.1 Définitions et notations

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Définition 1** La moyenne généralisé  $m$  induite par  $f$  est la collection de poids :

$$m = \{m^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}, n \geq 1, \varepsilon_i = \pm\}$$

avec

$$\forall n \geq 1, \forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{+, -\}^n, m^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n f(x_i) \sigma_{\varepsilon_i}(\check{x}_i) dx_i,$$

où

$$\forall 1 \leq i \leq n, \check{x}_i = x_1 + \dots + x_i, \quad \sigma_{\varepsilon_i} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\varepsilon_i}}.$$

Pour la suite, nous avons aussi besoin d'introduire une nouvelle famille de coefficients qui joue un rôle important dans la preuve de la formule d'Andersen.

Pour tout  $n \geq 1$  et pour une suite  $\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{x} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \\ x_1, \dots, x_n \end{smallmatrix}\right) \in (\{+, -\} \times \mathbb{R})^n$ , on pose

$$M\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{x} \end{smallmatrix}\right) = M\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \\ x_1, \dots, x_n \end{smallmatrix}\right) = \sigma_{\varepsilon_1}(x_1) \sigma_{\varepsilon_2}(x_1 + x_2) \dots \sigma_{\varepsilon_n}(x_1 + \dots + x_n). \quad (1)$$

Ainsi, pour  $\underline{\varepsilon} \in (\{+, -\})^n$ ,

$$m^{\underline{\varepsilon}} = \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} f(x_1) \dots f(x_n) M\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{x} \end{smallmatrix}\right) dx_1 \dots dx_n. \quad (2)$$

Cette présentation suggère que beaucoup de propriétés peuvent se déduire de l'étude de la famille de coefficient  $M$ . En particulier, nous allons démontrer une formule de "décomposition en arbre" de ces coefficients.

## 1.2 Décomposition en arbre de la famille $M$

### 1.2.1 Arbres enracinés, plans, décorés, ordonnés

Nous rappelons brièvement la construction de l'algèbre de Hopf des arbres enracinés plans [F1, H], qui généralise celle de Connes-Kreimer des arbres enracinés [CK]. Un *arbre enraciné* est un graphe fini sans boucle avec un sommet particulier appelé la *racine* [S]. Une *forêt enracinée* est un graphe fini  $F$  dont toutes les composantes connexes sont des arbres enracinés. L'ensemble des sommets d'une forêt enracinée  $F$  est noté  $V(F)$ . Le *degré* d'une forêt  $F$  est le nombre, noté  $|F|$ , de sommets de  $F$ . L'unique forêt de degré 0 est l'arbre vide noté 1. Voici par exemple les forêts enracinées de degré  $\leq 4$  :

$$1, \cdot, \dots, \uparrow, \dots, \uparrow\cdot, \vee, \uparrow\uparrow, \dots, \uparrow\uparrow\uparrow, \vee\cdot, \uparrow\uparrow\cdot, \Psi, \downarrow\vee, \Upsilon, \uparrow\uparrow\uparrow.$$

Soit  $F$  une forêt enracinée. Les arêtes de  $F$  sont orientées vers le bas (des feuilles vers les racines). Si  $v, w \in V(F)$ , on notera  $v \rightarrow w$  s'il y a une arête de  $F$  de  $v$  vers  $w$  et  $v \rightsquigarrow w$  si il y a un chemin orienté de  $v$  vers  $w$  dans  $F$ . Par convention,  $v \rightsquigarrow v$  pour tout  $v \in V(F)$ . Si  $v, w \in V(F)$ , on dira que  $v$  est un *descendant* de  $w$  si  $v \rightsquigarrow w$  et que  $v$  est un *ancêtre* de  $w$  si  $w \rightsquigarrow v$ . Si  $v \in V(F)$ , nous noterons  $h(v)$  la *hauteur* de  $v$ , c'est-à-dire le nombre d'arêtes sur le chemin orienté entre  $v$  et la racine de l'arbre qui a  $v$  pour sommet.

Une *forêt plane* est une forêt enracinée  $F$  tel que l'ensemble des racines de  $F$  est totalement ordonné et, pour tout sommet  $v \in V(F)$ , l'ensemble  $\{w \in V(F) \mid w \rightarrow v\}$  est totalement ordonné. Par exemple, voici les forêts planes de degré  $\leq 4$  :

$$1, \dots, \uparrow, \dots, \uparrow, \dots, \uparrow, \mathbb{V}, \uparrow, \dots, \uparrow, \dots, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \mathbb{V}, \uparrow, \dots, \mathbb{V}, \uparrow, \mathbb{V}, \uparrow, \mathbb{V}, \uparrow, \uparrow.$$

Soit  $\mathbf{v}$  un sous-ensemble de  $V(F)$ . On dira que  $\mathbf{v}$  est une *coupe admissible* de  $F$ , et on écrira  $\mathbf{v} \models V(F)$ , si  $\mathbf{v}$  est totalement déconnecté, c'est-à-dire que  $v \not\rightarrow w$  pour tout couple  $(v, w)$  d'éléments distincts de  $\mathbf{v}$ . Si  $\mathbf{v} \models V(F)$ ,  $Lea_{\mathbf{v}}(F)$  est la sous-forêt enracinée plane de  $F$  obtenu en gardant seulement les sommets "au-dessus" de  $\mathbf{v}$ , c'est-à-dire  $\{w \in V(F) \mid \exists v \in \mathbf{v}, w \rightarrow v\}$ . Remarquons que  $\mathbf{v} \subseteq Lea_{\mathbf{v}}(F)$ .  $Roo_{\mathbf{v}}(F)$  est la sous-forêt enracinée plane obtenue en gardant les autres sommets.

En particulier, si  $\mathbf{v} = \emptyset$ , alors  $Lea_{\mathbf{v}}(F) = 1$  et  $Roo_{\mathbf{v}}(F) = F$  : c'est la *coupe vide* de  $F$ . Si  $\mathbf{v}$  contient les racines de  $F$ , alors il contient uniquement les racines de  $F$ , et  $Lea_{\mathbf{v}}(F) = F$ ,  $Roo_{\mathbf{v}}(F) = 1$  : c'est la *coupe totale* de  $F$ . On écrira  $\mathbf{v} \Vdash V(F)$  si  $\mathbf{v}$  est une coupe admissible non vide, non totale de  $F$ . Une coupe admissible  $\mathbf{v}$  est une *coupe simple* si  $\text{card}(\mathbf{v}) = 1$ .

Il est prouvé dans [F1] que l'espace  $\mathcal{H}_{PR}$  généré par les forêts planes est une bigèbre. Le produit est donné par la concaténation des forêts planes et le coproduit est défini pour toute forêt enracinée plane  $F$  par :

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= \sum_{\mathbf{v} \models V(F)} Lea_{\mathbf{v}}(F) \otimes Roo_{\mathbf{v}}(F), \\ &= F \otimes 1 + 1 \otimes F + \sum_{\mathbf{v} \Vdash V(F)} Lea_{\mathbf{v}}(F) \otimes Roo_{\mathbf{v}}(F), \text{ si } F \neq 1. \end{aligned}$$

Si  $F$  est non vide, on pose  $\tilde{\Delta}(F) = \Delta(F) - (F \otimes 1 + 1 \otimes F)$ .

Nous aurons besoin d'une version décorée de cette algèbre de Hopf. Si  $\mathcal{D}$  est un ensemble non vide, une *forêt plane décorée* est un couple  $(F, d)$ , où  $F$  est une forêt enracinée plane et  $d : V(F) \rightarrow \mathcal{D}$  une application. L'algèbre des forêts planes décorées  $\mathcal{H}_{PR}^{\mathcal{D}}$  est encore une algèbre de Hopf. Nous donnons ci-dessous les arbres plans décorés de degré  $\leq 4$  :

$$\bullet_a, a \in \mathcal{D}, \quad \uparrow_a^b, (a, b) \in \mathcal{D}^2, \quad \mathring{\mathbb{V}}_a^b, \uparrow_a^c, (a, b, c) \in \mathcal{D}^3,$$

$$\mathring{\mathbb{V}}_a^c, \mathring{\mathbb{V}}_a^b, \mathring{\mathbb{V}}_a^c, \mathring{\mathbb{V}}_a^c, \uparrow_a^d, (a, b, c, d) \in \mathcal{D}^4.$$

Rappelons aussi la notion de forêt ordonnée. Une *forêt ordonnée* est une forêt enracinée avec un ordre total sur l'ensemble de ces sommets. Notons  $\mathcal{H}_o$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par les forêts ordonnées. Si  $F$  et  $G$  sont deux forêts ordonnées, alors la forêt ordonnée  $FG$  est aussi une forêt ordonnée avec, pour tout  $v \in F$ ,  $w \in G$ ,  $v < w$ . Cela définit un produit non commutatif sur l'ensemble des forêts ordonnées, qui s'étend linéairement à  $\mathcal{H}_o$ . Par exemple,  $(\uparrow_1^2) \times (\bullet_1 \mathring{\mathbb{V}}_4^3) = \uparrow_1^2 \bullet_3 \mathring{\mathbb{V}}_6^5$ . Voici les forêts ordonnées de degré  $\leq 3$  :

$$1, \bullet_1, \bullet_1 \bullet_2, \uparrow_1^2, \uparrow_1^1, \bullet_1 \bullet_2 \bullet_3, \bullet_1 \uparrow_2^3, \bullet_1 \uparrow_3^2, \uparrow_1^3 \bullet_2, \bullet_2 \uparrow_3^1, \uparrow_1^2 \bullet_3, \uparrow_1^1 \bullet_3, \mathring{\mathbb{V}}_1^3, \mathring{\mathbb{V}}_2^3, \mathring{\mathbb{V}}_3^2, \uparrow_1^3, \uparrow_1^2, \uparrow_2^3, \uparrow_1^1, \uparrow_2^2, \uparrow_3^1.$$

Si  $F$  est une forêt ordonnée, alors toute sous-forêt de  $F$  est aussi ordonnée. On peut donc définir un coproduit sur  $\mathcal{H}_o$  comme suit : pour toute forêt ordonnée  $F$ ,

$$\Delta(F) = \sum_{v \models V(F)} \text{Lea}_v(F) \otimes \text{Roo}_v(F). \quad (3)$$

Par exemple,

$$\Delta \left( \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 4 \downarrow \\ \vee_2^3 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 4 \downarrow \\ \vee_2^3 \end{array} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 4 \downarrow \\ \vee_2^3 \end{array} + \bullet_1 \otimes \begin{array}{c} 3 \downarrow \\ \vee_1^2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 2 \downarrow \\ \vee_1^1 \end{array} \otimes \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 1 \downarrow \\ \vee_1^1 \end{array} + \bullet_1 \otimes \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 3 \downarrow \\ \vee_2^1 \end{array} + \bullet_1 \bullet_2 \otimes \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 1 \downarrow \\ \vee_1^2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 3 \downarrow \\ \vee_1^1 \end{array} \bullet_2 \otimes \bullet_1.$$

Les forêts planes sont ordonnées, en numérotant les sommets suivant l'ordre défini plus haut. Réciproquement, les forêts ordonnées sont planes. Il suffit de supprimer l'indexation des sommets.

Si  $F$  est une forêt ordonnée de degré  $n$  et  $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$  une suite de réels, on peut identifier le sommet  $i$  et le réel  $x_i$ . On définit alors les "sommets généalogiques" associées à  $F$  et  $\underline{x}$  comme suit :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \check{x}_j = \sum_{x_i \twoheadrightarrow x_j} x_i.$$

**Exemple.** Soit  $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^4$ .

- Si  $F = \begin{array}{c} 2 \downarrow \\ 1 \downarrow \\ \vee_3^4 \end{array}$ , alors  $\check{x}_1 = x_1 + x_2$ ,  $\check{x}_2 = x_2$ ,  $\check{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  et  $\check{x}_4 = x_4$ .
- Si  $F = \begin{array}{c} 1 \downarrow \\ 2 \downarrow \\ \vee_4^1 \end{array}$ , alors  $\check{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $\check{x}_2 = x_2$ ,  $\check{x}_3 = x_3$  et  $\check{x}_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ .

**Définition 2** Soit  $F$  une forêt ordonnée de degré  $n$ ,  $\underline{x} = x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon = \pm$ . Nous définissons alors le coefficient

$$M_F^{\varepsilon, \underline{x}} = \prod_{x_i} \sigma_{\varepsilon(-1)^{h(x_i)}}(\check{x}_i).$$

**Exemple.** Si  $\varepsilon = +$ ,  $\underline{x} = x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{R}^8$  et  $F = \begin{array}{c} 2 \downarrow \\ 7 \downarrow \\ \vee_3^4 \end{array} \begin{array}{c} 5 \downarrow \\ 1 \downarrow \\ \vee_6^8 \end{array}$ , alors

$$\begin{aligned} M_F^{+, \underline{x}} &= \sigma_+(x_2 + x_3 + x_4 + x_7) \sigma_-(x_2 + x_4 + x_7) \sigma_+(x_2) \sigma_+(x_4) \\ &\quad \times \sigma_+(x_1 + x_5 + x_6 + x_8) \sigma_-(x_1) \sigma_-(x_5) \sigma_-(x_8). \end{aligned}$$

### 1.2.2 Un ensemble de forêts ordonnées $\mathcal{G}$

Commençons par introduire deux opérateurs de greffes  $B^+$  et  $B^-$ . Pour cela, considérons une suite de  $m$  arbres ordonnés non vides  $T_1, \dots, T_m$  dont la somme des degrés est notée  $n$ . On pose :

1.  $B^-(T_1, \dots, T_m)$  l'arbre ordonné de degré  $n+1$  obtenu comme suit : on considère  $T_1, \dots, T_m$  comme la suite des sous-arbres d'un arbre enraciné ayant pour racine le sommet indexé par  $n+1$ . De plus, on conviendra que  $B^-(1)$  est égale à l'arbre  $\bullet_1$ , où 1 désigne l'arbre vide.
2.  $B^+(T_1, \dots, T_m)$  l'arbre ordonné de degré  $n+1$  construit en greffant le sommet indexé par  $n+1$  comme le fils le plus à droite de la racine de  $T_1$  et en considérant alors  $T_2, \dots, T_m$  comme la suite des sous-arbres issus du sommet indexé par  $n+1$ . En particulier, on notera  $B^+(T_1) = B^+(T_1, 1)$  l'arbre obtenu en greffant le sommet indexé par  $|T_1|+1$  comme le fils le plus à droite de la racine de  $T_1$ . De plus, on conviendra que  $B^+(1)$  est égale à l'arbre  $\bullet_1$ .

**Exemples.**  $B^-(\mathfrak{!}_1^2, \cdot_1) = \mathfrak{!}_4^3$ ,  $B^+(\mathfrak{!}_3^2) = B^+(\mathfrak{!}_3^2, 1) = \mathfrak{!}_3^4$ ,  $B^+(\mathfrak{!}_1^2, \cdot_1) = \mathfrak{!}_1^3$ .

Pour toute suite  $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{+, -\}^n$ , avec  $n \geq 1$ , on définit par récurrence un ensemble  $\mathcal{G}^{(\underline{\varepsilon})}$  qui correspond à un ensemble de forêts ordonnées de degré  $n$ .

Si  $n = 1$ ,  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1)}$ , pour  $\varepsilon_1$  quelconque, est l'ensemble réduit à un seul élément, la forêt de degré 1, l'unique sommet étant évidemment indexé par 1.

Si  $n \geq 2$ , considérons l'ensemble  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$  déjà construit.

1. Si  $\varepsilon_n = -$ , les éléments  $F$  de  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}$  sont obtenus par la transformation suivante. On prend un élément  $F' = T_1 \dots T_m$  de  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$ , avec  $m \geq 1$ , et on considère  $T_1, \dots, T_m$  comme la suite des sous-arbres d'un arbre enraciné ayant pour racine le sommet indexé par  $n$ . Cela donne ainsi naissance à une nouvelle forêt ordonnée de degré  $n$ , avec un seul arbre, égale à  $B^-(T_1, \dots, T_m)$ .
2. Si  $\varepsilon_n = +$ , alors comme précédemment on considère un élément  $F'$  de  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$ . Nous avons alors plusieurs possibilités pour ajouter un nouveau sommet indexé par  $n$ . Notons encore  $F' = T_1 \dots T_m$ , où  $T_1, \dots, T_m$  est la suite des arbres qui composent la forêt  $F'$  et  $m \geq 1$ . On peut alors faire l'une des transformations suivantes pour obtenir un élément de  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}$ .
  - (a) Concaténer l'unique arbre de degré 1 indexé par  $n$  à la forêt  $T_1 \dots T_m$  sur la droite. Cela donne la forêt ordonnée de degré  $n$  égale à  $T_1 \dots T_m \cdot n$ .
  - (b) Pour  $1 \leq i \leq m$ , greffer le sommet indexé par  $n$  comme le fils le plus à droite de la racine de  $T_i$  et considérer alors  $T_{i+1}, \dots, T_m$  comme la suite des sous-arbres issus du sommet indexé par  $n$ . On obtient alors la forêt ordonnée de degré  $n$  égale à  $T_1 \dots T_{i-1} B^+(T_i, \dots, T_m)$ .

Voici une illustration de cette construction pour  $n = 1, 2, 3, 4$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}^{(+)} = \mathcal{G}^{(-)} &= \{\cdot_1\} \\
 \mathcal{G}^{(+,+)} = \mathcal{G}^{(-,+)} &= \{\cdot_1 \cdot 2, \mathfrak{!}_1^2\} \\
 \mathcal{G}^{(+,-)} = \mathcal{G}^{(-,-)} &= \{\mathfrak{!}_2^1\} \\
 \mathcal{G}^{(+,+,+)} = \mathcal{G}^{(-,+,+)} &= \{\cdot_1 \cdot 2 \cdot 3, \cdot_1 \mathfrak{!}_3^2, \mathfrak{!}_3^2, \mathfrak{!}_1^2 \cdot 3, \mathfrak{!}_1^3\} \\
 \mathcal{G}^{(+,-,+)} = \mathcal{G}^{(-,-,+)} &= \{\mathfrak{!}_2^1 \cdot 3, \mathfrak{!}_2^3\} \\
 \mathcal{G}^{(+,+, -)} = \mathcal{G}^{(-,+, -)} &= \{\mathfrak{!}_3^2, \mathfrak{!}_3^2\} \\
 \mathcal{G}^{(+,-, -)} = \mathcal{G}^{(-,-, -)} &= \{\mathfrak{!}_3^1\} \\
 \mathcal{G}^{(+,+,+,+)} = \mathcal{G}^{(-,+,+,+)} &= \{\cdot_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \cdot_1 \cdot 2 \mathfrak{!}_4^3, \cdot_1 \mathfrak{!}_4^3, \mathfrak{!}_4^3, \cdot_1 \mathfrak{!}_2^3 \cdot 4, \cdot_1 \mathfrak{!}_2^4, \mathfrak{!}_4^3, \mathfrak{!}_1^2 \cdot 3 \cdot 4, \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_3^4, \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_3^4, \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_3^4, \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_3^4, \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_3^4\} \\
 \mathcal{G}^{(+,-,+,+)} = \mathcal{G}^{(-,-,+,+)} &= \{\mathfrak{!}_2^1 \cdot 3 \cdot 4, \mathfrak{!}_2^1 \mathfrak{!}_3^4, \mathfrak{!}_2^1 \mathfrak{!}_3^4, \mathfrak{!}_2^1 \mathfrak{!}_3^4, \mathfrak{!}_2^1 \mathfrak{!}_3^4\} \\
 \mathcal{G}^{(+,+, -, +)} = \mathcal{G}^{(-,+, -, +)} &= \{\mathfrak{!}_3^2 \cdot 4, \mathfrak{!}_3^2 \cdot 4, \mathfrak{!}_3^2 \cdot 4, \mathfrak{!}_3^2 \cdot 4\} \\
 \mathcal{G}^{(+,-, -, +)} = \mathcal{G}^{(-,-, -, +)} &= \{\mathfrak{!}_3^1 \cdot 4, \mathfrak{!}_3^1 \cdot 4\} \\
 \mathcal{G}^{(+,+,+, -)} = \mathcal{G}^{(-,+,+, -)} &= \{\mathfrak{!}_4^3, \mathfrak{!}_4^3, \mathfrak{!}_4^3, \mathfrak{!}_4^3, \mathfrak{!}_4^3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(+,-,+,-)} &= \mathcal{G}^{(-,-,+,-)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \diagdown \\ 2 \end{array} \mathbf{V}_4^3, \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \diagdown \\ 2 \\ \diagup \diagdown \\ 3 \\ \diagup \diagdown \\ 4 \end{array} \mathbf{V}_4^3 \right\} \\ \mathcal{G}^{(+,+,+,-)} &= \mathcal{G}^{(-,+,+,-)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \diagdown \\ 2 \\ \diagup \diagdown \\ 3 \\ \diagup \diagdown \\ 4 \end{array} \mathbf{V}_4^2, \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \diagdown \\ 2 \\ \diagup \diagdown \\ 3 \\ \diagup \diagdown \\ 4 \end{array} \mathbf{V}_4^2 \right\} \\ \mathcal{G}^{(+,-,-,-)} &= \mathcal{G}^{(-,-,-,-)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \diagdown \\ 2 \\ \diagup \diagdown \\ 3 \\ \diagup \diagdown \\ 4 \end{array} \mathbf{V}_4^1 \right\}\end{aligned}$$

Pour  $n \geq 2$ , étant donné  $F \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$ , on note  $S_{\varepsilon_n}(F)$  l'ensemble des forêts construites à partir d'un  $B^{\varepsilon_n}$  et de  $F$  comme précédemment. En particulier,

$$\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)} = \bigcup_{F \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}} S_{\varepsilon_n}(F),$$

l'union étant disjointe car il n'y a pas de répétition dans la construction précédente.

Dans la suite, étant donné  $\underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^n$  avec  $n \geq 1$ , on identifiera toujours les deux ensembles  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon})}$  et  $\mathcal{G}^{(-, \underline{\varepsilon})}$  (et les deux ensembles  $\mathcal{G}^{(+)}$  et  $\mathcal{G}^{(-)}$ ). On préférera, suivant les cas, dire qu'une forêt appartient à  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon})}$  ou à  $\mathcal{G}^{(-, \underline{\varepsilon})}$ .

**Notation.** Si  $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{+, -\}^n$  avec  $n \geq 1$ ,  $\rho(\underline{\varepsilon}) = \varepsilon_1, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \in \{+, -\}^n$ .

Cette étrange construction devient naturelle dans le résultat suivant sur la décomposition en arbre de la famille  $M$  :

**Théorème 3** Pour  $\begin{pmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \in (\{+, -\} \times \mathbb{R})^n$ ,

$$M \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \sum_{F \in \mathcal{G}^{(\rho(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}))}} M_F^{\varepsilon, \underline{x}}. \quad (4)$$

**Preuve.** Par récurrence sur  $n$ , le résultat étant évident si  $n = 1$ . Pour  $n \geq 2$ , par définition de la famille  $M$  (voir (1)),

$$M \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \\ x_1, \dots, x_{n-1} \end{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Par ailleurs, pour  $\varepsilon = \pm$  et  $y_1, \dots, y_m, z \in \mathbb{R}$  avec  $m \geq 1$  : ( $\bar{\varepsilon} = -\varepsilon$ )

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon}(y_1) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_m) \sigma_{\varepsilon}(y_1 + \dots + y_m + z) &= \sigma_{\varepsilon}(y_1) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_m) \sigma_{\varepsilon}(z) \\ &+ \sum_{i=1}^m \left( \sigma_{\varepsilon}(y_1) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_{i-1}) \sigma_{\varepsilon}(y_i + \dots + y_m + z) \right. \\ &\quad \left. \times \sigma_{\bar{\varepsilon}}(y_{i+1} + \dots + y_m + z) \sigma_{\varepsilon}(y_{i+1}) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_m) \right).\end{aligned} \quad (5)$$

En effet, supposons par exemple  $\varepsilon = +$  (c'est le même raisonnement avec  $\varepsilon = -$ ). Le membre de droite est non-nul (et donc égal à 1) si les  $y_i > 0$  et  $y_1 + \dots + y_m + z > 0$ . Ceci est équivalent à :

1. soit les  $y_i > 0$  et  $z > 0$ . C'est le terme  $\sigma_{\varepsilon}(y_1) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_m) \sigma_{\varepsilon}(z)$ .
2. soit les  $y_i > 0$  et  $z < 0$ . Dans ce cas, il existe un unique  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $y_i + \dots + y_m + z > 0$  et  $y_{i+1} + \dots + y_m + z < 0$ . C'est le terme  $\sigma_{\varepsilon}(y_1) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_{i-1}) \sigma_{\varepsilon}(y_i + \dots + y_m + z) \sigma_{\bar{\varepsilon}}(y_{i+1} + \dots + y_m + z) \sigma_{\varepsilon}(y_{i+1}) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_m)$ .

Si  $F$  est une forêt ordonnée de degré  $n$ ,  $\underline{x} = x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon, \eta \in \{+, -\}$ ,

$$M_F^{\varepsilon, (x_1, \dots, x_n)} \sigma_{\eta}(x_1 + \dots + x_{n+1}) = \sum_{G \in S_{\varepsilon\eta}(F)} M_G^{\eta, (x_1, \dots, x_{n+1})}.$$

En effet :

- Si  $\varepsilon\eta = -$ , on a multiplié par  $\sigma_{\bar{\varepsilon}}(x_1 + \dots + x_{n+1})$  ce qui correspond à faire un  $B^-$ .
- Si  $\varepsilon\eta = +$ , on a multiplié par  $\sigma_{\varepsilon}(x_1 + \dots + x_{n+1})$  et dans ce cas on applique la formule (5) au plus grand bloc de  $\sigma_{\varepsilon}(y_1) \dots \sigma_{\varepsilon}(y_m)\sigma_{\varepsilon}(x_1 + \dots + x_{n+1})$  ( $z = x_{n+1}$  et  $y_1 + \dots + y_m = x_1 + \dots + x_n$ ) et chaque terme de la somme correspond à faire un  $B^+$ .

Par récurrence, la formule (4) est donc démontrée.  $\square$

**Exemple.** Soit  $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^4$  et  $F = \mathfrak{!}_1^2 \cdot_3$ . Supposons que  $\varepsilon = +$ .

- Si  $\varepsilon\eta = -$ , c'est-à-dire  $\eta = -$ , alors

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \mathfrak{!}_1^2 \cdot_3 & \xrightarrow{B^-} & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_4^3 \\ \sigma_{-}(x_2)\sigma_{+}(x_1 + x_2)\sigma_{+}(x_3) & \xrightarrow{\times \sigma_{-}(x_1 + \dots + x_4)} & \sigma_{-}(x_2)\sigma_{+}(x_1 + x_2)\sigma_{+}(x_3)\sigma_{-}(x_1 + \dots + x_4) \end{array}$$

- Si  $\varepsilon\eta = +$ , c'est-à-dire  $\eta = +$ , alors

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \mathfrak{!}_1^2 \cdot_3 & \xrightarrow{B^+} & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \mathfrak{!}_1^2 \cdot_3 \cdot_4, \quad \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_3^4, \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \mathfrak{!}_1^2 \mathfrak{!}_4^3 \\ \sigma_{-}(x_2)\sigma_{+}(x_1 + x_2)\sigma_{+}(x_3) & \xrightarrow{\times \sigma_{+}(x_1 + \dots + x_4)} & \begin{array}{l} \sigma_{-}(x_2)\sigma_{+}(x_3)\sigma_{+}(x_4)\sigma_{+}(x_1 + x_2) \\ + \sigma_{-}(x_2)\sigma_{-}(x_4)\sigma_{+}x_1 + (x_2)\sigma_{+}(x_3 + x_4) \\ + \sigma_{-}(x_2)\sigma_{+}(x_1 + \dots + x_4)\sigma_{-}(x_3 + x_4)\sigma_{+}(x_3), \end{array} \end{array}$$

en utilisant (5) avec  $y_1 = x_1 + x_2$ ,  $y_2 = x_3$  et  $z = x_4$ .

Avec (2) et (4), nous en déduisons une décomposition en arbre des coefficients  $m^{\varepsilon}$ . On peut alors prouver la formule d'Andersen en utilisant des arguments combinatoires techniques (voir [Me] pour plus de détails).

## 2 Algèbres de greffes

Nous allons maintenant étudier les propriétés algébriques des opérateurs de greffes  $B^+$  et  $B^-$  introduit à la section 1.2.2. En particulier, nous allons étudier l'algèbre  $\mathcal{B}^{\infty}$  engendrée par les ensembles  $\mathcal{G}^{(\underline{\varepsilon})}$  encore défini à la section 1.2.2. On construira ensuite une algèbre  $\mathcal{B}$  toujours à l'aide des opérateurs de greffes  $B^+$  et  $B^-$  et on donnera différentes propriétés sur cette algèbre.

### 2.1 L'algèbre $\mathcal{B}^{\infty}$

#### 2.1.1 Etude des ensembles $\mathcal{G}$

**Lemme 4** Soient  $\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}' \in \bigcup_{n \geq 1} \{+, -\}^n$ , avec  $\underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}'$ . Alors  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon})} \cap \mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon}')} = \emptyset$ .

**Preuve.** Soient  $\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}' \in \bigcup_{n \geq 1} \{+, -\}^n$ , avec  $\underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}'$ . Tout d'abord, supposons que la suite  $\underline{\varepsilon}$  est de longueur  $n$  et que la suite  $\underline{\varepsilon}'$  est de longueur  $n'$ , avec  $n \neq n'$ . Comme les éléments de  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon})}$  sont de degré  $n + 1$  et ceux de  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon}')}$  sont de degré  $n' + 1$ ,  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon})} \cap \mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon}')} = \emptyset$ .

Supposons maintenant que les suites  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\varepsilon}'$  sont de même longueur  $n \geq 1$  et raisonnons par récurrence sur  $n$ . Le résultat est trivial pour  $n = 1$ . Supposons  $n \geq 2$ . On distingue alors deux cas :

1. Si  $\varepsilon_n \neq \varepsilon'_n$ , par exemple  $\varepsilon_n = -$  et  $\varepsilon'_n = +$ . Les éléments de  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon})}$  sont tous des arbres dont la racine est indexée par  $n + 1$ . L'ensemble  $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon}')}$  est constitué d'arbres et de forêts

(de longueur  $\geq 2$ ). Par construction, les arbres de  $\mathcal{G}^{(+,\varepsilon')}$  sont de la forme  $B^+(T_1, \dots, T_m)$ , avec  $m \geq 1$  et  $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}^{(+,\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1})}$ . En particulier, la racine de ces arbres est indexée par un entier  $< n + 1$ . Donc  $\mathcal{G}^{(+,\varepsilon)} \cap \mathcal{G}^{(+,\varepsilon')} = \emptyset$ .

2. Si  $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$ , comme  $\varepsilon \neq \varepsilon'$ ,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \neq \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}$ . Par l'absurde, supposons que  $\mathcal{G}^{(+,\varepsilon)} \cap \mathcal{G}^{(+,\varepsilon')} \neq \emptyset$ . Alors il existe une forêt  $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}^{(+,\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$  et une forêt  $T'_1 \dots T'_l \in \mathcal{G}^{(+,\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1})}$  telles que  $S_{\varepsilon_n}(T_1 \dots T_m) \cap S_{\varepsilon'_n}(T'_1 \dots T'_l) \neq \emptyset$ . Par hypothèse de récurrence,  $\mathcal{G}^{(+,\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})} \cap \mathcal{G}^{(+,\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1})} = \emptyset$ , donc  $T_1 \dots T_m \neq T'_1 \dots T'_l$ . Or

- (a) si  $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = -$ ,  $S_-(T_1 \dots T_m) = \{B^-(T_1, \dots, T_m)\}$ ,  $S_-(T'_1 \dots T'_l) = \{B^-(T'_1, \dots, T'_l)\}$ . Donc  $B^-(T_1, \dots, T_m) = B^-(T'_1, \dots, T'_l)$  et, nécessairement,  $m = l$  et  $T_1 \dots T_m = T'_1 \dots T'_l$ . On aboutit donc à une contradiction.

- (b) si  $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = +$ , alors

$$\begin{aligned} S_+(T_1 \dots T_m) &= \{B^+(T_1, \dots, T_m), T_1 B^+(T_2, \dots, T_m), \dots, T_1 \dots T_{m-1} B^+(T_m), \\ &\quad T_1 \dots T_m \bullet_{n+1}\} \\ S_+(T'_1 \dots T'_l) &= \{B^+(T'_1, \dots, T'_l), T'_1 B^+(T'_2, \dots, T'_l), \dots, T'_1 \dots T'_{l-1} B^+(T'_l), \\ &\quad T'_1 \dots T'_l \bullet_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Alors il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $j \in \{1, \dots, l\}$  tels que  $T_1 \dots T_{i-1} B^+(T_i, \dots, T_m) = T'_1 \dots T'_{j-1} B^+(T'_j, \dots, T'_l)$ . Nécessairement, on doit avoir  $i = j$ ,  $T_1 = T'_1, \dots, T_{i-1} = T'_{i-1}$  et  $B^+(T_i, \dots, T_m) = B^+(T'_i, \dots, T'_l)$ . Or cette dernière égalité implique que  $m = l$  et  $T_i = T'_i, \dots, T_m = T'_m$ . Ici encore, cela contredit  $T_1 \dots T_m \neq T'_1 \dots T'_l$ .

Par récurrence, le résultat est ainsi démontré.  $\square$

Considérons les ensembles suivants :

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\varepsilon \in \{+, -\}^n, n \geq 1} \mathcal{G}^{(\varepsilon)} \text{ et } \mathcal{G}^0 = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^n}.$$

D'après le lemme 4, les deux unions précédentes sont disjointes (à l'identification près des ensembles  $\mathcal{G}^{(+,\varepsilon)}$  et  $\mathcal{G}^{(-,\varepsilon)}$ ) et il n'y a donc pas de redondances dans la construction des forêts appartenant à  $\mathcal{G}$ .

Remarquons que  $\mathcal{G}$  n'est pas stable pour l'opération de concaténation. Par exemple, les arbres  $\mathfrak{!}_1^1$  et  $\mathfrak{!}_2^1$  appartiennent à  $\mathcal{G}$  mais la forêt  $\mathfrak{!}_1^1 \mathfrak{!}_2^1 \notin \mathcal{G}$ . Cela est dû au fait que l'arbre de droite qui compose la forêt  $\mathfrak{!}_1^1 \mathfrak{!}_2^1$  a été construit avec un  $B^-$  ( $\mathfrak{!}_2^1 \in \mathcal{G}^{(+,-)}$ ). Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Lemme 5** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. La forêt  $T_1 \dots T_m$  appartient à  $\mathcal{G}$ .
2.  $T_1 \in \mathcal{G}$  et  $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ .

*En particulier, pour toute forêt  $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}$ ,  $T_1, \dots, T_m$  appartiennent à  $\mathcal{G}$ .*

**Preuve.** Démontrons tout d'abord le sens direct. Soit une forêt  $T_1 \dots T_m$  appartenant à  $\mathcal{G}$  et notons  $n = |T_1| + \dots + |T_m|$  son degré. D'après le lemme 4, il existe un unique  $\varepsilon \in \{+, -\}^n$  tel que  $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}^{(\varepsilon)}$ . Soit  $i$  le plus grand indice tel que  $\varepsilon_i = -$ . Par construction, les éléments appartenant à  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)}$  sont des arbres de la forme  $B^-$  de l'arbre vide si  $i = 1$  ou  $B^-$  d'une suite d'arbres  $G_1, \dots, G_k$  telle que  $G_1 \dots G_k \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1})}$  si  $i \geq 2$ .  $T_1$  contient donc un sous-arbre  $B^-(G_1, \dots, G_k)$  ( $B^-(1)$  si  $i = 1$ ) appartenant à  $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)}$ . Autrement dit,  $\exists l \geq 0$  tel que

$$T_1 = \overbrace{B^+(\dots B^+)}^{l \text{ fois}}(B^-(G_1, \dots, G_k), \dots), \dots).$$



Ainsi,  $|T_1| \geq i$ . Par ailleurs, remarquons que si  $F_1 F_2 \in \mathcal{G}^{(\varepsilon)}$ , alors  $F_1 \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{|F_1|})}$  et  $F_2 \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_{|F_1|+1}, \dots, \varepsilon_{|F_1|+|F_2|})}$ . Ainsi,  $T_1 \in \mathcal{G}$  et  $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ .

Réciproquement, montrons que si  $T_1 \in \mathcal{G}$  et  $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ , alors  $T_1 T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}$  par récurrence sur  $|F|$ , où  $F = T_2 \dots T_m$ . Si  $|F| = 1$ , c'est-à-dire  $F = \cdot_1$ , alors  $T_1 F = T_1 \cdot_{|T_1|+1}$ , et par construction de  $\mathcal{G}$ ,  $T_1 F \in \mathcal{G}$ . Soit  $n \geq 1$  et supposons le résultat vérifié pour tout  $F$  tel que  $|F| \leq n$ . Considérons  $F = T_2 \dots T_m$  de degré  $n+1$ , avec  $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ . Si  $|T_m| = 1$ , par hypothèse de récurrence  $T_1 T_2 \dots T_{m-1} \in \mathcal{G}$  et comme pour l'initialisation  $T_1 T_2 \dots T_{m-1} \cdot_{|T_1|+n+1} \in \mathcal{G}$ . Sinon, comme  $T_m \in \mathcal{G}^0$ , il existe  $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}^0$  tel que  $T_m = B^+(G_1, \dots, G_k)$ , avec  $G_1 \dots G_k$  une forêt de degré  $|T_m| - 1$ . Par hypothèse de récurrence,  $T_1 \dots T_{m-1} G_1 \dots G_k \in \mathcal{G}$ , donc  $T_1 F = T_1 T_2 \dots T_{m-1} B^+(G_1, \dots, G_k)$  appartient bien à  $\mathcal{G}$ .  $\square$

D'après le lemme précédent,  $\mathcal{G}$  est stable par concaténation à gauche par des éléments de  $\mathcal{G}^0$ . Pour  $\mathcal{G}^0$ , on a le

**Lemme 6**  $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$  est un monoïde libre pour l'opération de concaténation.

**Preuve.** En effet, si  $T_1 T_2 \in \mathcal{G}^0$ ,  $T_1 T_2 \in \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^{|T_1|+|T_2| \text{ fois}}}$ , donc  $T_1 \in \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^{|T_1| \text{ fois}}} \subseteq \mathcal{G}^0$  et  $T_2 \in \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^{|T_2| \text{ fois}}} \subseteq \mathcal{G}^0$ .

Réciproquement, supposons que  $T_1, T_2 \in \mathcal{G}^0$  et raisonnons par récurrence sur le degré de  $T_2$ . Si  $|T_2| = 1$ ,  $T_2 = \cdot_1$  et alors  $T_1 T_2 \in \mathcal{G}^0$  par construction de  $\mathcal{G}^0$ . Supposons  $|T_2| \geq 2$ . Comme  $T_2 \in \mathcal{G}^0$ , il existe  $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}^0$  tels que  $T_2 = B^+(G_1, \dots, G_k)$ . Alors la forêt  $T_1 G_1 \dots G_k \in \mathcal{G}^0$  par hypothèse de récurrence, et donc  $T_1 T_2 = T_1 B^+(G_1, \dots, G_k) \in \mathcal{G}^0$ , par construction de  $\mathcal{G}^0$ .  $\square$

**Remarque.** Posons  $\Delta_{\mathbf{l}}(F) = \sum_{\mathbf{v} \models V(F) \text{ et } \text{root}(F) \in \text{Roo}_{\mathbf{v}}(F)} \text{Lea}_{\mathbf{v}}(F) \otimes \text{Roo}_{\mathbf{v}}(F)$  pour toute forêt non vide  $F$ , où  $\text{root}(F)$  est la racine de l'arbre le plus à gauche de la forêt  $F$ . Soient  $T_1, \dots, T_m$   $m$  arbres non vides,  $m \geq 1$ . Alors, en étudiant les coupes admissibles :

$$\begin{aligned} \Delta(B^-(T_1, \dots, T_m)) &= (Id \otimes B^-) \circ \Delta(T_1 \dots T_m) + B^-(T_1 \dots T_m) \otimes 1, \\ \Delta(B^+(T_1, \dots, T_m)) &= (Id \otimes B^+) \circ \Delta_{\mathbf{l}}(T_1 \dots T_m) + B^+(T_1, \dots, T_m) \otimes 1 \\ &\quad + \Delta_{\mathbf{l}}(T_1) \cdot (B^-(T_2, \dots, T_m) \otimes 1). \end{aligned}$$

**Lemme 7** Soit  $T$  un arbre appartenant à  $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ . Alors, pour toute coupe admissible  $\mathbf{v} \models V(T)$ ,  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer que, pour toute coupe simple  $\mathbf{v} \models V(T)$  et pour tout arbre  $T \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ ,  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ . On raisonne par récurrence sur le degré  $n$  de  $T \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ , le résultat étant trivial si  $n = 0, 1, 2$ .

Supposons  $n \geq 3$ . Comme  $T \in \mathcal{G}^0$ , il existe  $m \geq 1$ ,  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ , tels que  $T = B^+(T_1, \dots, T_m)$ . Soit  $\mathbf{v} \models V(T)$  une coupe simple de  $T$ . Il y a trois cas possibles :

1. Si  $\mathbf{v} \models V(T_1)$ , par hypothèse de récurrence,  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ . Si  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) = 1$ ,  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = 1$ . Si  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) \neq 1$ , alors, avec le lemme 6,  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}^0$ , donc  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^+(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0$ .
2. Si  $\mathbf{v} \models V(T_i)$ , avec  $i \geq 2$  (on inclut ici le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre le sommet indexé par  $n$  et la racine de  $T_i$ ). Par hypothèse de récurrence,  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ . Avec le lemme 6,  $T_1 \dots \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m \in \mathcal{G}^0$ , et ainsi  $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^+(T_1, \dots, \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0$ .

3. Enfin, si on coupe l'arête joignant la racine de  $T$  (qui est aussi la racine de  $T_1$ ) et le sommet indexé par  $n$ , alors  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = T_1 \in \mathcal{G}^0$ .

Ainsi, dans tous les cas,  $Roo_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}^0$ , et on peut conclure par le principe de récurrence.  $\square$

**Remarque.** Par contre, étant donné un arbre  $T$  appartenant à  $\mathcal{G}^0$ , il existe certaines coupes  $\mathbf{v} \models V(T)$  telles que  $Lea_{\mathbf{v}}(T) \notin \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ . Par exemple, considérons  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ , avec  $m \geq 2$ , et  $T = B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0$ . Alors, si on réalise la coupe simple  $\mathbf{v} \models V(T)$  consistant à couper l'arête joignant la racine de  $T$  (qui est aussi la racine de  $T_1$ ) et le sommet indexé par  $|T|$ ,  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(\dots-)}$  et donc  $\notin \mathcal{G}^0$  en utilisant le lemme 4.

### 2.1.2 L'algèbre de Hopf $\mathcal{B}^\infty$

Notons  $\mathcal{B}^\infty = \mathbb{K}[\mathcal{G} \cup \{1\}]$  l'algèbre engendrée par  $\mathcal{G} \cup \{1\}$ . D'après le lemme 5,  $\mathcal{B}^\infty$  est engendrée librement par les arbres appartenant à  $\mathcal{G}$ .

Nous avons le résultat remarquable suivant :

**Proposition 8** *L'algèbre  $\mathcal{B}^\infty$  est une algèbre de Hopf.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que, en réalisant une coupe simple d'un arbre appartenant à  $\mathcal{G}$ , la branche et le tronc appartiennent respectivement à  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G} \cup \{1\}$ . En effet, si ce résultat est démontré, on aura alors le résultat pour une coupe admissible quelconque puisque  $\mathcal{B}^\infty$  est engendrée par  $\mathcal{G} \cup \{1\}$  comme algèbre. Travaillons par récurrence sur le degré des arbres. Le résultat est trivial pour  $n = 2, 3$ . Au rang  $n \geq 4$ , considérons un arbre  $T \in \mathcal{G}$  de degré  $n$ , et  $\mathbf{v} \models V(T)$  une coupe simple. Il y a deux cas possibles :

1. Si l'arbre est de la forme  $T = B^-(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(\dots-)}$ . Par construction, la forêt  $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}$  et, avec le lemme 5,  $T_1 \in \mathcal{G}$  et  $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ . Si  $\mathbf{v}$  est la coupe totale, le résultat est trivial. Sinon, comme  $\mathbf{v}$  est une coupe simple de  $T$ , il existe un unique  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\mathbf{v} \models V(T_i)$  (on inclut ici le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre la racine de  $T$  et celle de  $T_i$ ). Par récurrence,  $Lea_{\mathbf{v}}(T_i)$  appartient à  $\mathcal{G}$ , car  $T_i \in \mathcal{G}$ . De même, par récurrence,  $Roo_{\mathbf{v}}(T_i)$  appartient à  $\mathcal{G} \cup \{1\}$ . Alors la forêt  $T_1 \dots Roo_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m \in \mathcal{G} \cup \{1\}$  car :
  - (a) si  $i = 1$ ,  $Roo_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G} \cup \{1\}$  et comme  $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ ,  $Roo_{\mathbf{v}}(T_1)T_2 \dots T_m \in \mathcal{G} \cup \{1\}$  en utilisant le lemme 5.
  - (b) si  $i \geq 2$ ,  $T_i \in \mathcal{G}^0$  donc, d'après le lemme 7,  $Roo_{\mathbf{v}}(T_i)$  appartient à  $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ . Ainsi, toujours avec le lemme 5, la forêt  $T_1 \dots Roo_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m$  appartient à  $\mathcal{G}$ .

Donc  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}$  et  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_1, \dots, Roo_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{G} \cup \{1\}$ .

2. Si l'arbre est de la forme  $T = B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(\dots+)}$ . Par construction, la forêt  $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}$ , donc  $T_1 \in \mathcal{G}$  et  $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$ . Si  $\mathbf{v}$  est la coupe simple correspondant à couper l'arête joignant la racine de  $T$  (qui est la racine de  $T_1$ ) et le sommet indexé par  $n$  joignant les racines communes de  $T_2, \dots, T_m$ , alors  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = T_1 \in \mathcal{G}$  et  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}$ . Le résultat est donc vérifié dans ce cas. Sinon, comme  $\mathbf{v}$  est une coupe simple de  $T$ , il existe un unique  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\mathbf{v} \models V(T_i)$  (si  $i \geq 2$ , le cas de la coupe totale correspond à couper l'arête entre le sommet de  $T$  indexé par  $n$  et la racine de  $T_i$ ). Il y a alors deux cas à distinguer :
  - (a) Si  $i = 1$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{v} \models V(T_1)$ . Si  $\mathbf{v}$  est totale, alors  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = T$  et  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = 1$  et le résultat est trivial. Sinon, par récurrence,  $Lea_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}$ , et  $Roo_{\mathbf{v}}(T_1)$  étant un arbre non vide  $Roo_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}$ . Ainsi, avec le lemme 5,  $Roo_{\mathbf{v}}(T_1)T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}$ . D'où  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = B^+(Roo_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m)$  et  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_1)$  appartiennent à  $\mathcal{G}$ .

- (b) Si  $i \geq 2$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{v} \models V(T_i)$ , toujours par récurrence,  $Lea_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}$  et avec le lemme 7,  $Roov_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ . Donc la forêt  $T_1 \dots Roov_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m \in \mathcal{G}$ . Ainsi  $Roov_{\mathbf{v}}(T) = B^+(T_1, \dots, Roov_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m)$  et  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i)$  sont des éléments de  $\mathcal{G}$ .

Dans tous les cas,  $Roov_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G} \cup \{1\}$ ,  $Lea_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}$ .

Par récurrence, le résultat est démontré.  $\square$

**Proposition 9** *La série formelle de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{B}^\infty$  est donnée par la formule :*

$$F_{\mathcal{B}^\infty}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + \frac{1}{2}.$$

**Preuve.** Pour calculer la série formelle de l'algèbre  $\mathcal{B}^\infty$ , nous introduisons quelques notations. Posons  $f_{i,j}^{\mathcal{B}^\infty}$  le nombre de forêts de longueur  $i$  et de degré  $j$ , et  $f_j^{\mathcal{B}^\infty}$  le nombre de forêts de degré  $j$ . En particulier,  $f_j^{\mathcal{B}^\infty} = \sum_{1 \leq i \leq j} f_{i,j}^{\mathcal{B}^\infty}$ . Par construction de  $\mathcal{B}^\infty$ , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{1,1}^{\mathcal{B}^\infty} &= 1 \\ f_{k,1}^{\mathcal{B}^\infty} &= 0 \text{ si } k \geq 2 \\ f_{1,n}^{\mathcal{B}^\infty} &= 2f_{n-1}^{\mathcal{B}^\infty} \\ f_{k,n}^{\mathcal{B}^\infty} &= f_{k-1,n-1}^{\mathcal{B}^\infty} + \dots + f_{n-1,n-1}^{\mathcal{B}^\infty} \text{ si } k \geq 2, n \geq 2. \end{aligned}$$

Posons  $F(x) = \sum_{i \geq 1} f_i^{\mathcal{B}^\infty} x^i$  et, pour  $k \geq 1$ ,  $F_k(x) = \sum_{i \geq 1} f_{k,i}^{\mathcal{B}^\infty} x^i$ . Comme  $f_{k,i}^{\mathcal{B}^\infty} = 0$  si  $i < k$ ,  $F_k(x) = \sum_{i \geq k} f_{k,i}^{\mathcal{B}^\infty} x^i$ . Alors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k \geq 1} F_k(x) \\ F_1(x) &= 2xF(x) + x \\ F_k(x) &= x \left( \sum_{i \geq k-1} F_i(x) \right) = x \left( F(x) - F_1(x) - \dots - F_{k-2}(x) \right) \text{ si } k \geq 2. \end{aligned}$$

Par différence, on obtient pour tout  $l \geq 1$  :

$$F_{l+2} - F_{l+1} + xF_l = 0.$$

Il existe donc  $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[[x, x^{-1}]]$  tels que  $\forall l \geq 1$ ,

$$F_l(x) = A(x) \left( \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} \right)^l + B(x) \left( \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} \right)^l,$$

d'où

$$F(x) = A(x) \frac{1 - 2x - \sqrt{1-4x}}{2} + B(x) \frac{1 - 2x + \sqrt{1-4x}}{2}. \quad (6)$$

En faisant  $l = 1, 2$ , nous avons les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} A(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} F(x) + \frac{1}{2} + \frac{1-2x}{2\sqrt{1-4x}} \\ B(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} F(x) + \frac{1}{2} + \frac{1-2x}{2\sqrt{1-4x}} \end{cases} \quad (7)$$

Montrons que  $B(x) = 0$ . Si  $B(x) \neq 0$ ,  $B(x) = a_k x^k + \dots$ ,  $a_k \neq 0$ . De plus,

$$F_l(x) = A(x) \underbrace{\left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \right)^l}_{=x+\dots} + B(x) \underbrace{\left( \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2} \right)^l}_{=1+\dots},$$

donc, si  $l > k$ ,

$$\begin{aligned} A(x) \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \right)^l &= \mathcal{O}(x^l) \\ B(x) \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2} \right)^l &= a_k x^k + \dots \end{aligned}$$

D'où  $F_l(x) = a_k x^k + \dots$ . Or  $F_l(x) = \sum_{i \geq l} f_{l,i}^{\mathcal{B}^\infty} x^i$ , donc  $F_l(x) = \mathcal{O}(x^l)$ , et  $a_k = 0$ .

Ainsi  $B(x) = 0$ , et avec (6) et (7),

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1 - 4x - \sqrt{1 - 4x}}{2(4x - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{1 - 4x}} - \frac{1}{2} \\ A(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 - 4x}} \end{aligned}$$

Au passage, on obtient la formule pour les  $F_k$  :

$$F_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - 4x}} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \right)^{k-1}.$$

Finalement la série formelle de  $\mathcal{B}^\infty$  est donnée par :

$$F_{\mathcal{B}^\infty}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - 4x}} + \frac{1}{2}.$$

□

Ainsi, pour tout  $k \geq 1$ ,  $f_{1,k}^{\mathcal{B}^\infty} = \frac{(2k - 2)!}{(k - 1)!(k - 1)!}$  et  $f_k^{\mathcal{B}^\infty} = \frac{(2k)!}{2(k!)^2}$ . Voici quelques valeurs numériques :

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^\infty}$	1	2	6	20	70	252	924	3432
$f_k^{\mathcal{B}^\infty}$	1	3	10	35	126	462	1716	6435

Muni de la concaténation, l'ensemble  $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ , constitué de l'arbre vide et de tous les arbres construits uniquement avec des  $B^+$ , est un monoïde. Notons  $\mathcal{B}^0$  l'algèbre unitaire engendrée par ce monoïde. Si  $T$  est un arbre appartenant à  $\mathcal{G}^0$ , il existe certaines coupes  $\mathbf{v} \models V(T)$  telles que  $Lea_{\mathbf{v}}(T) \notin \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$  (voir la remarque qui suit le lemme 7).  $\mathcal{B}^0$  n'est donc pas une cogèbre. Par contre, d'après le lemme 7,  $\mathcal{B}^0$  est un comodule à droite de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{B}^\infty$ .

## 2.2 L'algèbre $\mathcal{B}$

### 2.2.1 Construction de $\mathcal{B}$ et premières propriétés

A partir d'une construction similaire à celle décrite dans la partie 1.2.2, nous allons définir une nouvelle algèbre notée  $\mathcal{B}$  contenant l'algèbre de Hopf  $\mathcal{B}^\infty$ . Pour cela, on construit inductivement un ensemble d'arbres  $\mathcal{T}^{(n,\varepsilon)}$  de degré  $n \geq 1$ , pour  $\varepsilon \in \{+, -\}$ .

Si  $n = 1$ ,  $\mathcal{T}^{(1,\varepsilon)}$ , pour  $\varepsilon$  quelconque, est l'ensemble réduit à un seul élément, l'unique arbre de degré 1.

Si  $n \geq 2$ , supposons les ensembles  $\mathcal{T}^{(k,\varepsilon)}$  construits, pour tout  $1 \leq k \leq n - 1$ .

1. Si  $\varepsilon = -$ , les arbres  $T$  de  $\mathcal{T}^{(n,-)}$  sont construits comme suit. On prend une forêt  $F = T_1 \dots T_m$  de degré  $n - 1$  construite à partir de  $m \geq 1$  arbres appartenant à l'ensemble  $\bigcup_{1 \leq k \leq n-1, \varepsilon \in \{+,-\}} \mathcal{T}^{(k,\varepsilon)}$  et on considère  $T_1, \dots, T_m$  comme la suite des sous-arbres d'un arbre enraciné ayant pour racine le sommet indexé par  $n$ . Cela donne ainsi naissance à un nouvel arbre ordonné  $T = B^-(T_1, \dots, T_m)$  de degré  $n$ .
2. Si  $\varepsilon = +$ , on construit alors les arbres  $T$  de  $\mathcal{T}^{(n,+)}$  par la transformation suivante. On prend une forêt  $F = T_1 \dots T_m$  de degré  $n - 1$  avec  $T_1, \dots, T_m \in \bigcup_{1 \leq k \leq n-1, \varepsilon \in \{+,-\}} \mathcal{T}^{(k,\varepsilon)}$  et  $m \geq 1$ . On construit alors  $T$  en greffant le sommet indexé par  $n$  comme le fils le plus à droite de la racine de  $T_1$  et en considérant  $T_2, \dots, T_m$  comme la suite des sous-arbres issus du sommet indexé par  $n$ . Cela donne un nouvel arbre ordonné  $T = B^+(T_1, \dots, T_m)$  de degré  $n$ .

Considérons un arbre  $T$  construit à partir des instructions précédentes, de degré  $n$ . Soit le sommet indexé par  $n$  est la racine et  $T \in \mathcal{T}^{(n,-)}$ , soit le sommet indexé par  $n$  est le fils le plus à droite de la racine et  $T \in \mathcal{T}^{(n,+)}$ . De plus, deux arbres de  $\mathcal{T}^{(n,-)}$  (resp.  $\mathcal{T}^{(n,+)}$ ) sont égaux si et seulement si les forêts à partir desquelles ils sont construits sont égales. Ainsi, les arbres construits avec les instructions précédentes sont tous distincts. En particulier,  $\text{card}(\mathcal{T}^{(n,+)}) = \text{card}(\mathcal{T}^{(n,-)})$ ,  $\forall n \geq 1$ .

On pose alors  $\mathcal{T}$  l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 1, \varepsilon \in \{+,-\}} \mathcal{T}^{(n,\varepsilon)}$ , l'union étant disjointe (on identifie  $\mathcal{T}^{(1,-)}$  et  $\mathcal{T}^{(1,+)}$ ). Voici une illustration pour  $n = 1, 2, 3$  et 4 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{(1,-)} = \mathcal{T}^{(1,+)} &= \{\bullet_1\} \\
 \mathcal{T}^{(2,+)} &= \{\uparrow_1^2\} \\
 \mathcal{T}^{(2,-)} &= \{\downarrow_1^1\} \\
 \mathcal{T}^{(3,+)} &= \{\uparrow_1^2 \uparrow_2^3, \uparrow_2^3, \uparrow_3^2\} \\
 \mathcal{T}^{(3,-)} &= \{\downarrow_1^2, \downarrow_2^1, \downarrow_3^2\} \\
 \mathcal{T}^{(4,+)} &= \{\uparrow_1^3 \uparrow_2^4, \uparrow_2^4, \uparrow_3^4, \uparrow_4^3, \uparrow_1^2 \uparrow_2^3, \uparrow_2^3, \uparrow_3^4, \uparrow_4^3, \uparrow_1^3, \uparrow_2^4, \uparrow_3^4, \uparrow_4^3, \uparrow_1^2 \uparrow_2^3, \uparrow_2^3, \uparrow_3^4, \uparrow_4^3\} \\
 \mathcal{T}^{(4,-)} &= \{\downarrow_1^3 \downarrow_2^4, \downarrow_2^4, \downarrow_3^4, \downarrow_4^3, \downarrow_1^2 \downarrow_2^3, \downarrow_2^3, \downarrow_3^4, \downarrow_4^3, \downarrow_1^3, \downarrow_2^4, \downarrow_3^4, \downarrow_4^3, \downarrow_1^2 \downarrow_2^3, \downarrow_2^3, \downarrow_3^4, \downarrow_4^3\}
 \end{aligned}$$

Définissons l'algèbre  $\mathcal{B}$  comme l'algèbre librement engendrée par l'ensemble  $\mathcal{T} \cup \{1\}$ . On a alors la propriété remarquable suivante :

**Proposition 10** *L'algèbre  $\mathcal{B}$  est une algèbre de Hopf.*

**Preuve.** Montrons que, en réalisant une coupe simple d'un arbre appartenant à  $\mathcal{T}$ , la branche et le tronc appartiennent respectivement à  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T} \cup \{1\}$ . On travaille par récurrence sur le degré des arbres. Le résultat est trivial pour  $n = 1, 2$  et 3. Au rang  $n \geq 4$ . Considérons un arbre  $T \in \mathcal{T}$  de degré  $n$  et  $\mathbf{v} \models V(T)$  une coupe simple. Il y a deux cas :

1. Si l'arbre est de la forme  $T = B^-(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{T}^{(n,-)}$ , avec  $m \geq 1$ . Par construction,  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$ . Si  $\mathbf{v}$  est la coupe totale, le résultat est évident. Sinon, comme  $\mathbf{v}$  est une coupe simple de  $T$ , il existe un unique  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\mathbf{v} \models V(T_i)$  (on inclut le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre la racine de  $T$  et celle de  $T_i$ ). Par

réurrence, comme  $T_i \in \mathcal{T}$ ,  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i)$  appartient à  $\mathcal{T}$ . De même, par récurrence  $Roo_{\mathbf{v}}(T_i)$  appartient à  $\mathcal{T} \cup \{1\}$  donc la forêt  $T_1 \dots Roo_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m$  est constituée d'arbres appartenant à  $\mathcal{T} \cup \{1\}$  et ainsi  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_1, \dots, Roo_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{T}$ .

2. Si l'arbre est de la forme  $T = B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{T}^{(n,+)}$ , avec  $m \geq 1$ . Comme précédemment,  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$ . Alors :

- (a) Si  $\mathbf{v}$  est la coupe simple correspondant à couper l'arête joignant la racine de  $T$  (qui est la racine de  $T_1$ ) et le sommet indexé par  $n$  joignant les racines communes de  $T_2, \dots, T_m$ , alors  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = T_1 \in \mathcal{T}$  et  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{T}$ . Le résultat est donc démontré dans ce cas.
- (b) Sinon, comme  $\mathbf{v}$  est une coupe simple de  $T$ , il existe un unique  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\mathbf{v} \models V(T_i)$  (on inclut le cas de la coupe totale qui, si  $i \geq 2$ , correspond à couper l'arête entre le sommet de  $T$  indexé par  $n$  et la racine de  $T_j$ ). Deux cas sont à distinguer :
  - i. Si  $i = 1$ . Si  $\mathbf{v} \models V(T_1)$  est la coupe totale, alors  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = 1$  et  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = T$  et le résultat est trivial. Sinon, par récurrence,  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{T}$  et  $Roo_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{T}$ , donc  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = B^+(Roo_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{T}$ .
  - ii. Si  $i \geq 2$ . Par récurrence,  $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i)$  appartient à  $\mathcal{T}$  et  $Roo_{\mathbf{v}}(T_i)$  appartient à  $\mathcal{T} \cup \{1\}$ . Donc  $Roo_{\mathbf{v}}(T) = B^+(T_1, \dots, Roo_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{T}$ .

Ainsi, dans tous les cas,  $Roo_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{T} \cup \{1\}$  et  $Lea_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{T}$ , et on peut conclure par le principe de récurrence.  $\square$

**Remarque.** Les relations d'inclusion suivantes sont évidemment vérifiées :

$$\mathcal{B}^0 \subseteq \mathcal{B}^\infty \subseteq \mathcal{B}.$$

Rappelons que  $\mathcal{B}^0$  est la sous-algèbre de  $\mathcal{B}$  engendrée par les arbres construits uniquement avec des  $B^+$ . De la même façon, on peut définir une sous-algèbre de  $\mathcal{B}$  en considérant la sous-algèbre engendrée par les arbres de  $\mathcal{B}$  qui sont construits uniquement avec des  $B^-$ . Notons-la  $\mathcal{B}_l$  (cette terminologie est justifiée par le théorème 17). Elle est clairement stable par coupe admissible, c'est donc une algèbre de Hopf. Il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre  $\mathcal{B}_l$  et  $\mathcal{H}_{PR}$  : à chaque arbre de  $\mathcal{H}_{PR}$  il y a une seule et unique façon de numéroter les sommets (en numérotant les sommets dans l'ordre croissant de gauche à droite et du haut vers le bas); cela définit une bijection entre les arbres de  $\mathcal{B}_l$  et les arbres de  $\mathcal{H}_{PR}$  qui s'étend en un isomorphisme d'algèbres graduées respectant le coproduit.

Il est possible de calculer la série formelle de l'algèbre  $\mathcal{B}$  :

**Proposition 11** *La série formelle de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{B}$  est donnée par la formule :*

$$F_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1 + x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{4x}.$$

**Preuve.** Notons  $f_n^{\mathcal{B}}$  le nombre de forêts de degré  $n$  de  $\mathcal{B}$  et  $f_{1,n}^{\mathcal{B}}$  le nombre d'arbres de degré  $n$ . On déduit de la construction de  $\mathcal{B}$  les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_1^{\mathcal{B}} &= 1 \\ f_{1,1}^{\mathcal{B}} &= 1 \\ f_{1,n}^{\mathcal{B}} &= 2f_{n-1}^{\mathcal{B}} \text{ si } n \geq 2. \end{aligned}$$

Introduisons la convention suivante :  $f_{1,0}^{\mathcal{B}} = 0$  et  $f_0^{\mathcal{B}} = 1$ . On pose alors  $F_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{n \geq 0} f_n^{\mathcal{B}} x^n$  et  $T_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{n \geq 0} f_{1,n}^{\mathcal{B}} x^n$ . L'algèbre étant libre,

$$F_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1}{1 - T_{\mathcal{B}}(x)}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 T_{\mathcal{B}}(x) - x &= \sum_{n \geq 2} f_{1,n}^{\mathcal{B}} x^n \\
 &= 2x \left( \sum_{n \geq 1} f_n^{\mathcal{B}} x^n \right) \\
 &= 2x \left( \frac{1}{1 - T_{\mathcal{B}}(x)} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Donc :  $T_{\mathcal{B}}^2(x) + (x-1)T_{\mathcal{B}}(x) + x = 0$ . Comme  $f_{1,0}^{\mathcal{B}} = 0$ ,

$$T_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1+x-\sqrt{1-6x+x^2}}{4x}.$$

□

Voici quelques valeurs numériques :

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{1,k}^{\mathcal{B}}$	1	2	6	22	90	394	1806	8558
$f_k^{\mathcal{B}}$	1	3	11	45	197	903	4279	20793

Rappelons le résultat suivant (voir [F2] pour une démonstration et pour une définition de la notion de bialgèbre dupliciale dendriforme),

**Théorème 12** *Soit  $A$  une bialgèbre dupliciale dendriforme. On suppose que  $A$  est graduée et connexe, c'est-à-dire que  $A_0 = (0)$ . Soit  $(p_{\mathcal{D}})_{d \in \mathcal{D}}$  une base de  $\text{Prim}_{\text{tot}}(A)$  formée par des éléments homogènes, indexés par un ensemble gradué  $\mathcal{D}$ . Il existe un unique isomorphisme de bialgèbres dupliciales dendriformes graduées :*

$$\phi : \begin{cases} (\mathcal{H}_{PR}^{\mathcal{D}})_+ & \longrightarrow A \\ \cdot_d, d \in \mathcal{D} & \longrightarrow p_d. \end{cases}$$

Il est possible de munir  $(\mathcal{B})_+$  de  $\rightharpoonup : (\mathcal{B})_+ \otimes (\mathcal{B})_+ \longrightarrow (\mathcal{B})_+$  et  $\tilde{\Delta}_{\prec}, \tilde{\Delta}_{\succ} : (\mathcal{B})_+ \longrightarrow (\mathcal{B})_+ \otimes (\mathcal{B})_+$  tels que  $((\mathcal{B})_+, *, \rightharpoonup, \tilde{\Delta}_{\prec}, \tilde{\Delta}_{\succ})$  soit une bialgèbre dupliciale dendriforme (voir [Ma01] pour plus de détails). Alors :

**Théorème 13** *Il existe un ensemble gradué  $\mathcal{D}$  tel que  $(\mathcal{B})_+$  est isomorphe à  $(\mathcal{H}_{PR}^{\mathcal{D}})_+$  comme bialgèbres dupliciales dendriformes graduées.*

La série formelle de  $\mathcal{D}$  est donnée par :

$$f_{\mathcal{D}}(x) = \frac{f_{\mathcal{B}}(x) - 1}{f_{\mathcal{B}}(x)^2}.$$

Cela donne :

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \mathcal{D} $	1	1	2	6	22	90	394	1806

Ainsi, on en déduit le

**Théorème 14**  $\mathcal{B}$  est colibre et auto-duale.

## 2.2.2 Algèbre bigreffe

**Algèbre de greffes à gauche** Définissons à présent une nouvelle loi de composition interne sur  $(\mathcal{B})_+$  qui va permettre de munir  $\mathcal{B}$  d'une structure d'algèbre de greffes à gauche unitaire.

Étant donnés deux arbres non vides  $T$  et  $G$  de  $\mathcal{T}$ , on définit un arbre  $T \succ G$  en greffant par la gauche  $T$  sur la racine de  $G$  et en indexant les sommets comme suit : on conserve l'indexation des sommets de  $T$  et on numérote ensuite les sommets de  $G$  dans leurs ordres de départ mais en décalant leurs indices par le nombre de sommets de  $T$ . Considérons maintenant une forêt  $T_1 \dots T_n$  et un arbre  $G$ , avec  $n \geq 1$  et  $T_1, \dots, T_n, G \in \mathcal{T}$  (tous non vides), on définit l'arbre  $(T_1 \dots T_n) \succ G$  en le posant égal à  $T_1 \succ (T_2 \succ (\dots (T_n \succ G) \dots))$ . Étant données deux forêts non vides  $T_1 \dots T_n$  et  $G_1 \dots G_m$ , avec  $n, m \geq 1$  et  $T_1, \dots, T_n, G_1, \dots, G_m \in \mathcal{T}$ , on pose  $(T_1 \dots T_n) \succ (G_1 \dots G_m) = ((T_1 \dots T_n) \succ G_1)G_2 \dots G_m$ . En étendant par linéarité  $\succ$ , on définit ainsi une nouvelle opération sur  $(\mathcal{B})_+$ . On utilisera la convention suivante : si  $T \in (\mathcal{B})_+$ ,  $1 \succ T = T$  et  $T \succ 1 = 0$ .

**Exemples.** Illustrons ci-dessous l'opération  $\succ$  :

$\bullet_1 \succ \uparrow_1^2 = \uparrow_2^3$	$\bullet_1 \bullet_2 \succ \bullet_1 = \uparrow_3^2$	$\bullet_1 \succ \bullet_1 \uparrow_2^3 = \uparrow_2^1 \uparrow_3^4$
$\uparrow_1^2 \succ \uparrow_1^2 \bullet_3 = \uparrow_3^1 \uparrow_4^5$	$\bullet_1 \bullet_2 \bullet_3 \succ \bullet_1 = \uparrow_4^2 \uparrow_3^1$	$\bullet_1 \succ \uparrow_1^2 \uparrow_2^3 = \uparrow_2^1 \uparrow_3^4$
$\uparrow_2^3 \succ \bullet_1 = \uparrow_4^1 \uparrow_2^3$	$\bullet_1 \uparrow_3^2 \succ \bullet_1 = \uparrow_4^1 \uparrow_3^2$	$\bullet_1 \bullet_2 \succ \uparrow_1^2 \uparrow_3^1 = \uparrow_3^2 \uparrow_4^5$

Montrons que  $(\mathcal{B})_+$  est bien stable pour la loi  $\succ$ . Il suffit de voir que si  $T$  et  $G$  sont deux arbres  $\in \mathcal{T}$ , l'arbre  $T \succ G$  défini précédemment est encore un élément de  $\mathcal{T}$ . Pour cela, notons  $G_1, \dots, G_n$  la suite des sous-arbres issus de la racine de  $G$ , et  $G_{i,1}, \dots, G_{i,m_i}$  la suite des sous-arbres issus de la racine de  $G_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Il y a alors deux cas :

1. Si  $G = B^+(\dots B^+(\bullet_1, G_{1,1}, \dots, G_{1,m_1}) \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})$ , alors par définition de  $\succ$ ,

$$T \succ G = B^+(\dots B^+(B^-(T), G_{1,1}, \dots, G_{1,m_1}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})$$

et ceci est bien un élément de  $\mathcal{T}$ .

2. Si il existe un  $1 \leq i \leq n$  tel que

$$G = \overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(G_1, \dots, G_i), G_{i+1,1}, \dots, G_{i+1,m_{i+1}}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})}^{n-i \text{ fois}},$$

alors par définition de  $\succ$ ,

$$T \succ G = \overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(T, G_1, \dots, G_i), G_{i+1,1}, \dots, G_{i+1,m_{i+1}}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})}^{n-i \text{ fois}},$$

et ceci est ici encore un élément de  $\mathcal{T}$ .

Ainsi  $(\mathcal{B})_+$  est stable pour l'opération  $\succ$ .

**Remarque.** Pour toute forêt non vide  $T_1 \dots T_n \in (\mathcal{B})_+$ ,  $(T_1 \dots T_n) \succ \bullet_1 = B^-(T_1, \dots, T_n)$ .

La propriété suivante vient directement de la définition de  $\succ$  :

**Lemme 15** *Étant donné  $F, G, H \in (\mathcal{B})_+$ ,*

$$(FG) \succ H = F \succ (G \succ H), \quad (8)$$

$$(F \succ G)H = F \succ (GH). \quad (9)$$



**Remarque.** L'opération  $\succ$  n'est pas associative. Par exemple,

$$\begin{aligned} \bullet_1 \succ (\bullet_1 \succ \bullet_1) &= \bullet_1 \succ \mathfrak{!}_2^1 = \mathfrak{!}_3^2, \\ (\bullet_1 \succ \bullet_1) \succ \bullet_1 &= \mathfrak{!}_2^1 \succ \bullet_1 = \mathfrak{!}_1^3. \end{aligned}$$

**Définition 16** Une algèbre de greffes à gauche est un espace vectoriel  $A$  muni de deux opérations  $*$  et  $\succ$  satisfaisant les deux relations suivantes :  $\forall x, y, z \in A$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= x * (y * z), \\ (x * y) \succ z &= x \succ (y \succ z), \\ (x \succ y) * z &= x \succ (y * z). \end{aligned}$$

Une algèbre de greffes à gauche unitaire  $A$  est un espace vectoriel  $A = \mathbb{K}1 \oplus \bar{A}$  tel que  $\bar{A}$  est une algèbre de greffes à gauche et où on a étendu les deux opérations  $*$  et  $\succ$  comme suit :

$$\begin{aligned} 1 * a = a * 1 = a, \text{ pour tout } a \in A, \\ 1 \succ a = a, a \succ 1 = 0, \text{ pour tout } a \in \bar{A}. \end{aligned} \tag{10}$$

Remarquons que  $1 \succ 1$  n'est pas défini.

Grâce au lemme 15,  $\mathcal{B}$  muni de la concaténation et de  $\succ$  est une algèbre de greffes à gauche unitaire, où  $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B})_+$  et  $1$  est l'arbre vide, de tel sorte que  $\mathcal{B} = \mathbb{K}1 \oplus \bar{\mathcal{B}}$ .

**Théorème 17**  $(\mathcal{B}_l)_+$  est l'algèbre de greffes à gauche libre engendrée par l'élément  $\bullet_1$ .

**Preuve.** Soit  $A$  une algèbre de greffes à gauche et soit  $a \in A$ . Il faut montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbres de greffes à gauche  $\phi : (\mathcal{B}_l)_+ \rightarrow A$  tel que  $\phi(\bullet_1) = a$ . On définit  $\phi(F)$  pour toute forêt non vide  $F \in (\mathcal{B}_l)_+$  inductivement sur le degré de  $F$  :

$$\begin{aligned} \phi(\bullet_1) &= a, \\ \phi(T_1 \dots T_k) &= \phi(T_1) \dots \phi(T_k) \text{ si } k \geq 2, \\ \phi(B^-(T_1, \dots, T_k)) &= \phi(T_1 \dots T_k) \succ a \text{ si } k \geq 1. \end{aligned}$$

Comme le produit  $*$  dans  $A$  est associatif,  $\phi$  est bien définie.  $\phi$  s'étend par linéarité en une application  $\phi : (\mathcal{B})_+ \rightarrow A$ . Montrons que c'est un morphisme d'algèbres de greffes à gauche. Par le second point,  $\phi(FG) = \phi(F)\phi(G)$  pour toutes forêts  $F, G \in (\mathcal{B}_l)_+$ . Considérons deux forêts non vides  $F$  et  $G$ . Il faut prouver que  $\phi(F \succ G) = \phi(F) \succ \phi(G)$ . On travaille par induction sur le degré  $n$  de  $G$ . Si  $n = 1$ ,  $G = \bullet_1$ , et :

$$\phi(F \succ G) = \phi(B^-(F)) = \phi(F) \succ a = \phi(F) \succ \phi(G).$$

Supposons le résultat vérifié pour toutes forêts de degré  $< n$ . Considérons alors  $G \in (\mathcal{B}_l)_+$  une forêt de degré  $n \geq 2$  et une forêt non vide  $F = F_1 \dots F_m \in (\mathcal{B}_l)_+$ . Notons  $k$  la longueur de  $G$ . Il y a deux cas suivant la longueur  $k$  de  $G$  :

1. Si  $k \geq 2$ ,  $G = G_1 \dots G_k$ . Alors

$$\begin{aligned} \phi(F \succ G) &= \phi((F_1 \dots F_m) \succ (G_1 \dots G_k)) \\ &= \phi(((F_1 \dots F_m) \succ G_1)G_2 \dots G_k) \\ &= \phi((F_1 \dots F_m) \succ G_1)\phi(G_2) \dots \phi(G_k) \\ &= (\phi(F_1 \dots F_m) \succ \phi(G_1))\phi(G_2) \dots \phi(G_k) \\ &= \phi(F) \succ (\phi(G_1)\phi(G_2) \dots \phi(G_k)) \\ &= \phi(F) \succ \phi(G), \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la quatrième égalité.

2. Si  $k = 1$ ,  $G$  est un arbre de degré  $n \geq 2$ , donc  $G = B^-(G_1, \dots, G_l)$ , avec  $G_1, \dots, G_l \in (\mathcal{B}_l)_+$  et  $l \geq 1$ . Alors

$$\begin{aligned}
\phi(F \succ G) &= \phi((F_1 \dots F_m) \succ B^-(G_1, \dots, G_l)) \\
&= \phi(B^-(F_1, \dots, F_m, G_1, \dots, G_l)) \\
&= \phi(F_1 \dots F_m G_1 \dots G_l) \succ a \\
&= (\phi(F_1 \dots F_m) \phi(G_1 \dots G_l)) \succ a \\
&= \phi(F) \succ (\phi(G_1 \dots G_l) \succ a) \\
&= \phi(F) \succ \phi(B^-(G_1, \dots, G_l)) \\
&= \phi(F) \succ \phi(G).
\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas,  $\phi(F \succ G) = \phi(F) \succ \phi(G)$ . Par le principe de récurrence, cette formule est donc démontrée pour toute forêt  $F, G \in (\mathcal{B}_l)_+$ .

Soit  $\phi' : (\mathcal{B}_l)_+ \rightarrow A$  un deuxième morphisme d'algèbres de greffes à gauche tel que  $\phi'(\bullet_1) = a$ . Soient  $k \geq 1$  et  $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}_l$ . Alors  $\phi'(T_1 \dots T_k) = \phi'(T_1) \dots \phi'(T_k)$ . De plus,

$$\begin{aligned}
\phi'(B^-(T_1, \dots, T_k)) &= \phi'((T_1 \dots T_k) \succ \bullet_1) \\
&= \phi'(T_1 \dots T_k) \succ \phi'(\bullet_1) \\
&= \phi'(T_1 \dots T_k) \succ a.
\end{aligned}$$

Donc  $\phi' = \phi$  et ceci termine la démonstration.  $\square$

**Algèbre de greffes à droite** On peut aussi définir une opération  $\prec : (\mathcal{B})_+ \times (\mathcal{B})_+ \rightarrow (\mathcal{B})_+$ . Cela va permettre de munir  $\mathcal{B}$  d'une structure d'algèbre de greffes à droite unitaire.

Étant donnés deux arbres non vides  $T$  et  $G$  appartenant à  $\mathcal{T}$ , on définit un arbre  $T \prec G$  en greffant par la droite  $G$  sur la racine de  $T$  et en indexant les sommets comme suit : on conserve l'indexation des sommets de  $T$ , puis on numérote les sommets de  $G$  différents de la racine de  $G$  en conservant l'ordre initial, et on termine en numérotant la racine de  $G$  (par  $|T| + |G|$ ). Considérons maintenant un arbre  $T$  et une forêt  $G_1 \dots G_m$ , avec  $T, G_1, \dots, G_m \in \mathcal{T}$ , on définit l'arbre  $T \prec (G_1 \dots G_m)$  en le posant égal à  $(\dots((T \prec G_1) \prec G_2) \dots \prec G_m)$ . Étant données deux forêts non vides  $T_1 \dots T_n$  et  $G_1 \dots G_m$ , avec  $n, m \geq 1$  et  $T_1, \dots, T_n, G_1, \dots, G_m \in \mathcal{T}$ , on pose  $(T_1 \dots T_n) \prec (G_1 \dots G_m) = T_1 \dots T_{n-1}(T_n \prec (G_1 \dots G_m))$ . En étendant par linéarité  $\prec$ , ceci définit une nouvelle opération sur  $(\mathcal{B})_+$ . Si  $T \in (\mathcal{B})_+$ , on pose  $T \prec 1 = T$  et  $1 \prec T = 0$ .

**Exemples.** Nous illustrons ci-dessous l'opération  $\prec$  :

$\bullet_1 \bullet_2 \prec \bullet_1 \bullet_2 = \bullet_1 \begin{array}{c} \text{3} \\ \vee \\ \text{2} \end{array} \text{4}$	$\bullet_1 \begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{3} \end{array} \prec \bullet_1 = \bullet_1 \begin{array}{c} \text{2} \\ \vee \\ \text{3} \end{array} \text{4}$	$\bullet_1 \prec \begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{1} \end{array}$
$\bullet_1 \bullet_2 \prec \begin{array}{c} \text{2} \\ \vee \\ \text{1} \end{array} \text{3} = \bullet_1 \begin{array}{c} \text{3} \\ \vee \\ \text{2} \end{array} \text{4}$	$\begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{1} \end{array} \prec \begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{2} \\ \vee \\ \text{1} \end{array} \text{3}$	$\bullet_1 \prec \bullet_1 \bullet_2 \bullet_3 = \begin{array}{c} \text{3} \\ \vee \\ \text{1} \end{array} \text{4}$
$\begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{1} \end{array} \prec \bullet_1 \begin{array}{c} \text{3} \\ \vdots \\ \text{2} \end{array} = \begin{array}{c} \text{3} \\ \vee \\ \text{1} \end{array} \text{4}$	$\begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{1} \end{array} \prec \begin{array}{c} \text{1} \\ \vee \\ \text{2} \end{array} \text{3} = \begin{array}{c} \text{3} \\ \vee \\ \text{1} \end{array} \text{4}$	$\begin{array}{c} \text{2} \\ \vdots \\ \text{1} \end{array} \prec \begin{array}{c} \text{1} \\ \vdots \\ \text{2} \end{array} = \begin{array}{c} \text{3} \\ \vee \\ \text{1} \end{array} \text{4}$

Vérifions que  $(\mathcal{B})_+$  est bien stable par  $\prec$ . Il suffit de montrer que si  $T$  et  $G$  sont deux arbres non vides appartenant à  $\mathcal{T}$ , l'arbre  $T \prec G$  défini précédemment est encore un élément de  $\mathcal{T}$ . Si  $G = \bullet_1$ ,  $T \prec G = B^+(T)$  appartient à  $\mathcal{T}$ . Supposons maintenant que  $|G| \geq 2$ . On note  $G_1, \dots, G_n$  la suite des sous-arbres issus de la racine de  $G$ , et  $G_{i,1}, \dots, G_{i,m_i}$  la suite des sous-arbres issus de la racine de  $G_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  (si  $G_i = \bullet_1$ , alors  $m_i = 1$  et  $G_{i,m_i} = 1$ ). Il y a alors plusieurs cas :

1. Si  $G = B^+(\dots B^+(\bullet_1, G_{1,1}, \dots, G_{1,m_1}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})$ , où  $G_{1,1}, \dots, G_{n,m_n} \in \mathcal{T}$  par construction. Alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $G_i = B^-(G_{i,1}, \dots, G_{i,m_i}) \in \mathcal{T}$ , et donc

$$T \prec G = B^+(T, G_1, \dots, G_n)$$

est un élément de  $(\mathcal{B})_+$ .

2. Si il existe un  $1 \leq i \leq n$  tel que

$$G = \overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(G_1, \dots, G_i), G_{i+1,1}, \dots, G_{i+1,m_{i+1}}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})}^{n-i \text{ fois}},$$

avec par construction  $G_1, \dots, G_i, G_{i+1,1}, \dots, G_{n,m_n} \in \mathcal{T}$ . Alors, pour tout  $i+1 \leq j \leq n$ ,  $G_j = B^-(G_{j,1}, \dots, G_{j,m_j}) \in \mathcal{T}$ , et donc

$$T \prec G = B^+(T, G_1, \dots, G_i, G_{i+1}, \dots, G_n)$$

est un élément de  $(\mathcal{B})_+$ .

Ainsi, dans tout les cas,  $(\mathcal{B})_+$  est stable par l'opération  $\prec$ .

**Remarque.** Soient  $n \geq 1$  et  $T_1, \dots, T_n$   $n$  arbres non vides  $\in (\mathcal{B})_+$ . Alors

$$T_1 \prec B^-(T_2, \dots, T_n) = B^+(T_1, \dots, T_n).$$

Le lemme suivant est évident :

**Lemme 18** *Étant donné*  $F, G, H \in (\mathcal{B})_+$ ,

$$F \prec (GH) = (F \prec G) \prec H, \quad (11)$$

$$F(G \prec H) = (FG) \prec H. \quad (12)$$

**Remarque.** Comme pour  $\succ$ ,  $\prec$  n'est pas associative. Par exemple,

$$\begin{aligned} \bullet_1 \prec (\bullet_1 \prec \bullet_1) &= \bullet_1 \prec \mathfrak{!}_1^2 = \mathfrak{!}_1^3, \\ (\bullet_1 \prec \bullet_1) \prec \bullet_1 &= \mathfrak{!}_1^2 \prec \bullet_1 = \mathfrak{2}\mathfrak{V}_1^3. \end{aligned}$$

**Définition 19** *Une algèbre de greffes à droite est un espace vectoriel*  $A$  *muni de deux opérations*  $*$  *et*  $\prec$  *satisfaisant les deux relations suivantes* :  $\forall x, y, z \in A$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= x * (y * z), \\ x \prec (y * z) &= (x \prec y) \prec z, \\ x * (y \prec z) &= (x * y) \prec z. \end{aligned}$$

*Une algèbre de greffes à droite unitaire*  $A$  *est un espace vectoriel*  $A = \mathbb{K}1 \oplus \overline{A}$  *tel que*  $\overline{A}$  *est une algèbre de greffes à droite et où on a étendu les deux opérations*  $*$  *et*  $\prec$  *comme suit* :

$$\begin{aligned} 1 * a = a * 1 &= a, \text{ pour tout } a \in A, \\ a \prec 1 = a, \quad 1 \prec a &= 0, \text{ pour tout } a \in \overline{A}. \end{aligned} \quad (13)$$

Remarquons que  $1 \prec 1$  n'est pas défini.

Ainsi, grâce au lemme 18,  $\mathcal{B}$  muni de la concaténation et de  $\prec$  est une algèbre de greffes à droite unitaire, où  $\overline{\mathcal{B}} = (\mathcal{B})_+$  et 1 est l'arbre vide de tel sorte que  $\mathcal{B} = \mathbb{K}1 \oplus \overline{\mathcal{B}}$ .

Notons  $\overline{\mathcal{B}}_r$  l'algèbre de greffes à droite engendrée par l'élément  $\bullet_1$ , et  $\mathcal{B}_r$  l'algèbre de greffes à droite unitaire égale à  $\mathbb{K}1 \oplus \overline{\mathcal{B}}_r$  de sorte que  $\overline{\mathcal{B}}_r = (\mathcal{B}_r)_+$ . Alors :

**Théorème 20**  $(\mathcal{B}_r)_+$  est libre.

**Preuve.** Il faut montrer que si  $T_1 \dots T_m$  est une forêt non vide appartenant à  $(\mathcal{B}_r)_+$  (avec  $m \geq 2$ ) alors  $T_1, \dots, T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$ . Raisonnons par récurrence sur le degré  $n = |T_1| + \dots + |T_m|$  de la forêt  $T_1 \dots T_m$ , le cas  $n = 1$  étant trivial. Supposons  $T_1 \dots T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$  de degré  $n \geq 2$ . Par construction de  $\mathcal{B}_r$ , il existe  $F_1, F_2 \in (\mathcal{B}_r)_+$  tel que  $T_1 \dots T_m = F_1 F_2$  ou  $T_1 \dots T_m = F_1 \prec F_2$ .

1. Si  $T_1 \dots T_m = F_1 F_2$ ,  $F_1$  et  $F_2$  étant non vides, il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $F_1 = T_1 \dots T_i$  et  $F_2 = T_{i+1} \dots T_m$ . Par hypothèse de récurrence, comme  $|F_1| < n$  et  $|F_2| < n$ ,  $T_1, \dots, T_i \in (\mathcal{B}_r)_+$  et  $T_{i+1}, \dots, T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$  ce qui démontre le résultat dans ce cas.
2. Si  $T_1 \dots T_m = F_1 \prec F_2$ , en notant  $G_1 \dots G_k$  la forêt  $F_1$ , on a l'égalité  $T_1 \dots T_{m-1} T_m = G_1 \dots G_{k-1} (G_k \prec F_2)$ . Nécessairement,  $k = m$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $T_i = G_i$  et  $T_m = G_m \prec F_2$ . Par hypothèse de récurrence, comme  $|F_1| < n$ ,  $G_1, \dots, G_m \in (\mathcal{B}_r)_+$ . Donc,  $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $T_i = G_i \in (\mathcal{B}_r)_+$ . De plus,  $G_m, F_2 \in (\mathcal{B}_r)_+$ , donc  $T_m = G_m \prec F_2 \in (\mathcal{B}_r)_+$ .

Dans tout les cas,  $T_1, \dots, T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$ . On conclut par le principe de récurrence.  $\square$

Voici par exemple les arbres appartenant à  $\mathcal{B}_r$  de degré  $\leq 4$  :

$$1, \bullet_1, \uparrow_1^2, \uparrow_1^3, \uparrow_1^4, \uparrow_1^5, \uparrow_1^6, \uparrow_1^7, \uparrow_1^8, \uparrow_1^9, \uparrow_1^{10}, \uparrow_1^{11}, \uparrow_1^{12}, \uparrow_1^{13}, \uparrow_1^{14}, \uparrow_1^{15}, \uparrow_1^{16}, \uparrow_1^{17}, \uparrow_1^{18}, \uparrow_1^{19}, \uparrow_1^{20}, \uparrow_1^{21}, \uparrow_1^{22}, \uparrow_1^{23}, \uparrow_1^{24}, \uparrow_1^{25}, \uparrow_1^{26}, \uparrow_1^{27}, \uparrow_1^{28}, \uparrow_1^{29}, \uparrow_1^{30}, \uparrow_1^{31}, \uparrow_1^{32}, \uparrow_1^{33}, \uparrow_1^{34}, \uparrow_1^{35}, \uparrow_1^{36}, \uparrow_1^{37}, \uparrow_1^{38}, \uparrow_1^{39}, \uparrow_1^{40}, \uparrow_1^{41}, \uparrow_1^{42}, \uparrow_1^{43}, \uparrow_1^{44}, \uparrow_1^{45}, \uparrow_1^{46}, \uparrow_1^{47}, \uparrow_1^{48}, \uparrow_1^{49}, \uparrow_1^{50}, \uparrow_1^{51}, \uparrow_1^{52}, \uparrow_1^{53}, \uparrow_1^{54}, \uparrow_1^{55}, \uparrow_1^{56}, \uparrow_1^{57}, \uparrow_1^{58}, \uparrow_1^{59}, \uparrow_1^{60}, \uparrow_1^{61}, \uparrow_1^{62}, \uparrow_1^{63}, \uparrow_1^{64}, \uparrow_1^{65}, \uparrow_1^{66}, \uparrow_1^{67}, \uparrow_1^{68}, \uparrow_1^{69}, \uparrow_1^{70}, \uparrow_1^{71}, \uparrow_1^{72}, \uparrow_1^{73}, \uparrow_1^{74}, \uparrow_1^{75}, \uparrow_1^{76}, \uparrow_1^{77}, \uparrow_1^{78}, \uparrow_1^{79}, \uparrow_1^{80}, \uparrow_1^{81}, \uparrow_1^{82}, \uparrow_1^{83}, \uparrow_1^{84}, \uparrow_1^{85}, \uparrow_1^{86}, \uparrow_1^{87}, \uparrow_1^{88}, \uparrow_1^{89}, \uparrow_1^{90}, \uparrow_1^{91}, \uparrow_1^{92}, \uparrow_1^{93}, \uparrow_1^{94}, \uparrow_1^{95}, \uparrow_1^{96}, \uparrow_1^{97}, \uparrow_1^{98}, \uparrow_1^{99}, \uparrow_1^{100}$$

Remarquons que  $\mathcal{B}_r$  n'est ni une algèbre de Hopf ni une sous-algèbre de  $\mathcal{B}^\infty$ .

**Algèbre bigresse** Remarquons que pour toute forêt  $F, G, H \in (\mathcal{B})_+$ ,

$$(F \succ G) \prec H = F \succ (G \prec H). \quad (14)$$

Cette relation est encore vraie si  $F, G$  ou  $H$  est égal à 1. Et elle n'a pas de sens si au moins deux des trois éléments  $F, G, H$  sont égaux à 1, car  $1 \succ 1$  et  $1 \prec 1$  ne sont pas définis.

Ceci nous amène à introduire la notion d'algèbre bigresse :

**Définition 21** Une algèbre bigresse est un espace vectoriel  $A$  muni de trois opérations  $*$ ,  $\succ$  et  $\prec$  telles que  $(A, *, \succ)$  est une algèbre de greffes à gauche,  $(A, *, \prec)$  est une algèbre de greffes à droite, et pour tout  $x, y, z \in A$ ,

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z).$$

Une algèbre bigresse unitaire  $A$  est un espace vectoriel  $A = \mathbb{K}1 \oplus \bar{A}$  tel que  $\bar{A}$  est une algèbre bigresse,  $(A, *, \succ)$  est une algèbre de greffes à gauche unitaire d'unité 1 et  $(A, *, \prec)$  est une algèbre de greffes à droite unitaire d'unité 1.

Ainsi, avec (14),  $\mathcal{B}$  munit de la concaténation, de  $\succ$  et de  $\prec$  est une algèbre bigresse unitaire, en prenant  $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B})_+$ , et pour 1 l'arbre vide.

**Théorème 22**  $(\mathcal{B})_+$  est engendrée comme algèbre bigresse par l'élément  $\bullet_1$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer que tout les arbres appartenant à  $\mathcal{T}$  peuvent être construit à partir de  $\bullet_1$  avec les opérations  $m$ ,  $\succ$  et  $\prec$ . Raisonnons par récurrence sur le degré, le résultat étant évidemment vrai au rang 1. Soit  $T \in \mathcal{T}$  de degré  $n \geq 2$ . Il y a deux cas :

1. Si  $T = B^-(T_1, \dots, T_k)$ , avec  $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T}$  de degré  $< n$  et  $k \geq 1$ . Par hypothèse de récurrence,  $T_1, \dots, T_k$  peuvent être construits à partir de  $\bullet_1$  avec les opérations  $m$ ,  $\succ$  et  $\prec$ . Alors  $T = (T_1 \dots T_k) \succ \bullet_1$  peut aussi être construit dans ce cas à partir de  $\bullet_1$  avec  $m$ ,  $\succ$  et  $\prec$ .

2. Si  $T = B^+(T_1, \dots, T_k)$ , avec  $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T}$  de degré  $< n$  et  $k \geq 1$ . Toujours par récurrence,  $T_1, \dots, T_k$  peuvent être construits à partir de  $\bullet_1$  avec  $m$ ,  $\succ$  et  $\prec$ . Si  $k = 1$ ,  $T = B^+(T_1) = T_1 \prec \bullet_1$  et le résultat est démontré. Sinon

$$T = T_1 \prec B^-(T_2, \dots, T_k) = T_1 \prec ((T_2 \dots T_k) \succ \bullet_1)$$

et  $T$  peut ici encore être construit à partir de  $\bullet_1$  avec  $m$ ,  $\succ$  et  $\prec$ .

Le principe de récurrence permet de conclure.  $\square$

### Remarque.

1.  $(\mathcal{B})_+$  n'est pas librement engendrée comme algèbre bigreffe par l'élément  $\bullet_1$ . Par exemple,

$$\bullet_1 \prec (\bullet_1 \prec \bullet_1) = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}^2 = \bullet_1 \prec (\bullet_1 \succ \bullet_1).$$

2. Une description de l'algèbre bigreffe libre engendrée par un générateur et de l'opérateur bigreffe associée est donnée dans [Ma02].

## Références

- [CK] Connes A. and Kreimer D., *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys **199** (1998), no. 1, 203-242, arXiv :hep-th/98 08042.
- [F1] Foissy L., *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés, I*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), no. 3, 193-239, arXiv :math.QA/01 05212.
- [F2] Foissy L., *Ordered forests and parking functions* (2011), arXiv :1007.1547.
- [Ma01] Mansuy A., *Algèbres de greffes*, à paraître dans Bull. Sci. Math., (2011), arXiv :1110.4800v2.
- [Ma02] Mansuy A., *The bigraft algebras*, (2012), arXiv :1206.5590.
- [Me] Menous F., *Random walks on  $\mathbb{R}$  and ordered trees : First applications*, (2002), Prépublication d'Orsay no. 2002-11, <http://www.math.u-psud.fr/biblio/ppo/2002/ppo2002-11.html>.
- [H] Holtkamp R., *Comparison of Hopf algebras on trees*, Arch. Math. (Basel) **80** (2003), no. 4, 368-383.
- [S] Stanley R.P., *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.