Introduction au Calcul Moulien

Anthony Mansuy

Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail : anthony.mansuy@univ-reims.fr

Novembre 2011

Résumé. Le calcul moulien a été introduit par Jean Ecalle au cours de ses nombreux travaux, aussi bien dans le domaine des formes normales de champs de vecteurs que dans l'étude de singularités, ou plus récemment pour démontrer certaines propriétés algébriques des polyzêtas. Les moules sont des objets on ne peut plus concret : ce sont des "fonctions à un nombre variable de variables". Après avoir rappelé les notions d'algèbre tensorielle et cotensorielle, on définit les moules et les principales opérations algébriques sur ces objets via les séries formelles non commutatives associées. On donne la traduction des diverses propriétés algébriques des séries (primitives/group-like) sur les moules associés conduisant aux symétries alternal/symétral. Pour finir, on s'interesse au problème de la recherche de formes normales de champs de vecteurs locaux de $\mathbb{C}^\nu$. On donne une version moulienne de la démonstration du théorème classique de Poincarré. Outre l'apport conceptuel, cette démonstration donne une forme explicite du normalisateur et permet de montrer l'existence de coefficients universels.

Table des matières

Sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ désignera dans la suite un corps de caractéristique nulle.

1 Préliminaires

1.1 Les algèbres de Hopf tensorielle et cotensorielle

Soit X un alphabet. On note X^* l'ensemble des mots construits sur X. Un élément de X^* sera noté $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in X$. La longueur d'une suite $\underline{x}$ se note $l(\underline{x}) = n$. On indicera les éléments de X^* sous la forme $\underline{x}^i$, et ses composantes comme $\underline{x}^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$. On note $\underline{x}^1 \bullet \underline{x}^2$ la suite obtenue par *concaténation* des suites $\underline{x}^1$ et $\underline{x}^2$ (ou $\underline{x}^1\underline{x}^2$ si aucune confusion n'est possible). Enfin le mot vide sera noté 1.

1.1.1 L'algèbre tensorielle

Soit $T(X)$ la $\mathbb{K}$-algèbre non commutative engendrée par les mots sur X^*. Soit Δ le morphisme d'algèbres uniquement déterminé par la formule $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in X$, et ε le morphisme d'algèbres à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui envoie chaque $x \in X$ sur 0 et 1 sur 1. Alors $(T(X), \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre cocommutative. Elle est de plus graduée par la longueur et connexe. C'est donc une algèbre de Hopf, l'antipode S étant donnée par $S(x) = -x$ pour $x \in X$. On l'appelle l'algèbre de Hopf tensorielle (ou de concaténation).

Décrivons de manière plus précise le coproduit de $T(X)$. Nous allons utiliser les notations suivantes : soient $x_1, \ldots, x_n \in X$. Pour toute partie $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, avec $i_1 < \ldots < i_k$, on pose $\underline{x}_I = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$. En particulier, $x_\emptyset = 1$.

Proposition 1 *Soient* $x_1, \ldots, x_n \in X$ $(n \geq 1)$. *Alors :*

$$\Delta((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} \underline{x}_I \otimes \underline{x}_{I^c}.$$

Preuve. Par récurrence sur n. C'est immédiat si $n = 1$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$.

$$\begin{aligned}
\Delta((x_1, \ldots, x_n)) &= \Delta((x_1, \ldots, x_{n-1}))\Delta(x_n) \\
&= \left(\sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n-1\}} \underline{x}_I \otimes \underline{x}_{I^c} \right) (x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n) \\
&= \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n-1\}} \underline{x}_I x_n \otimes \underline{x}_{I^c} + \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n-1\}} \underline{x}_I \otimes \underline{x}_{I^c} x_n \\
&= \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} \underline{x}_I \otimes \underline{x}_{I^c}.
\end{aligned}$$

□

L'algèbre $T(X)$ est munie d'une graduation naturelle par la longueur ; on appelle $T(X)^n$ l'ensemble des combinaisons linéaires de mots de longueur n. Alors

$$T(X) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} T(X)^n.$$

Prenons le complété par rapport à cette graduation que l'on note

$$\widehat{T(X)} = \prod_{n=0}^{+\infty} T(X)^n.$$

Un élément S d'un tel complété peut être représenté par une série formelle

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\underline{x} \in X^{*,n}} M^{\underline{x}} \underline{x} \right),$$

avec $Y_n \in T(X)^n$; nous noterons cette somme de manière condensée

$$\sum_{\bullet} M^{\bullet} \bullet .$$

Un élément de $\widehat{T(X)}$ est entièrement déterminé par la donnée de ses coefficients $M^{\bullet}$.

On définit le produit tensoriel complété

$$\widehat{T(X)} \widehat{\otimes} \widehat{T(X)} = \prod_{p,q} T(X)^p \otimes T(X)^q,$$

et on note que le coproduit Δ s'étend aux complétés.

Dans la suite, la $\mathbb{K}$-algèbre $\widehat{T(X)}$ des séries formelles non commutatives formée sur X^* sera plutôt noté $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ et $\mathbb{A} = (\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle, \Delta, \varepsilon)$.

1.1.2 L'algèbres cotensorielle

On étudie à présent $coT(X)$, le dual gradué de $T(X)$. $T(X)$ étant non commutative et cocommutative, $coT(X)$ est commutative et non cocommutative. Nous allons en donner une description.

Comme dual gradué de $T(X)$, $coT(X)$ est le groupe abélien libre de base les mots $\in X^*$. Il est muni de la graduation donnée par la longueur. Le crochet de dualité entre $T(X)$ et $coT(X)$ est donné par :

$$T(X) \times coT(X) \longrightarrow \mathbb{K},\ \left\langle \underline{x}^1, \underline{x}^2 \right\rangle = \delta_{\underline{x}^1, \underline{x}^2}.$$

On définit le produit et le coproduit sur $coT(X)$ par dualité :

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \Delta_{sh}(\underline{x}^3) \right\rangle & = & \left\langle \underline{x}^1 \underline{x}^2, \underline{x}^3 \right\rangle \\ \left\langle \underline{x}^1, m_{sh}(\underline{x}^2 \otimes \underline{x}^3) \right\rangle & = & \left\langle \Delta(\underline{x}^1), \underline{x}^2 \otimes \underline{x}^3 \right\rangle \end{array}$$

où le crochet de dualité est défini naturellement sur $(T(X) \otimes T(X)) \times (coT(X) \otimes coT(X))$ comme suit :

$$(T(X) \otimes T(X)) \times (coT(X) \otimes coT(X)) \longrightarrow \mathbb{K},\ \left\langle \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \underline{x}^3 \otimes \underline{x}^4 \right\rangle = \delta_{\underline{x}^1, \underline{x}^3} \delta_{\underline{x}^2, \underline{x}^4}.$$

On explicite le produit et le coproduit dans $coT(X)$:

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \Delta_{sh}(\underline{x}^3) \right\rangle & = & \left\langle \underline{x}^1 \underline{x}^2, \underline{x}^3 \right\rangle \\ & = & \delta_{\underline{x}^1 \underline{x}^2, \underline{x}^3} \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } l(\underline{x}^1) + l(\underline{x}^2) \neq l(\underline{x}^3), \\ \delta_{\underline{x}^1, x^3_1 \ldots x^3_{l(\underline{x}^1)}} \delta_{\underline{x}^2, x^3_{l(\underline{x}^1)+1} \ldots x^3_{l(\underline{x}^3)}} & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

Dans tous les cas :

$$\left\langle \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \Delta_{sh}(\underline{x}^3) \right\rangle = \left\langle \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \sum_{i=0}^{l(\underline{x}^3)} x^3_1 \ldots x^3_i \otimes x^3_{i+1} \ldots x^3_{l(\underline{x}^3)} \right\rangle.$$

Le coproduit dans $coT(X)$ est donc le coproduit de déconcaténation. Pour le produit m_{sh} :

$$\begin{aligned}
\left\langle \underline{x}^1, m_{sh}(\underline{x}^2 \otimes \underline{x}^3)\right\rangle &= \left\langle \Delta(\underline{x}^1), \underline{x}^2 \otimes \underline{x}^3\right\rangle \\
&= \sum_{I \subseteq \{1,\dots,l(\underline{x}^1)\}} \left\langle \underline{x}^1_I \otimes \underline{x}^1_{I^c}, \underline{x}^2 \otimes \underline{x}^3\right\rangle \\
&= \sum_{I \subseteq \{1,\dots,l(\underline{x}^1)\}} \delta_{\underline{x}^1_I, \underline{x}^2} \delta_{\underline{x}^1_{I^c}, \underline{x}^3} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } l(\underline{x}^1) \neq l(\underline{x}^2) + l(\underline{x}^3), \\ \displaystyle\sum_{I \subseteq \{1,\dots,l(\underline{x}^1)\}, card(I) = l(\underline{x}^2)} \delta_{\underline{x}^1_I, \underline{x}^2} \delta_{\underline{x}^1_{I^c}, \underline{x}^3} & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, par exemple :

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2), m_{sh}(x_1 \otimes x_2)\rangle &= \langle x_1 \otimes x_2, x_1 \otimes x_2\rangle + \langle x_2 \otimes x_1, x_1 \otimes x_2\rangle = 1, \\
\langle (x_2, x_1), m_{sh}(x_1 \otimes x_2)\rangle &= \langle x_2 \otimes x_1, x_1 \otimes x_2\rangle + \langle x_1 \otimes x_2, x_1 \otimes x_2\rangle = 1,
\end{aligned}$$

donc $m_{sh}(x_1 \otimes x_2) = (x_1, x_2) + (x_2, x_1)$. Autre exemple :

$$\begin{aligned}
& \langle (x_1, x_2, x_3), m_{sh}((x_1, x_2) \otimes x_3)\rangle \\
= & \langle (x_1, x_2) \otimes x_3, (x_1, x_2) \otimes x_3\rangle + \langle (x_1, x_3) \otimes x_2, (x_1, x_2) \otimes x_3\rangle \\
& + \langle (x_3, x_1) \otimes x_2, (x_1, x_2) \otimes x_3\rangle \\
= & 1 \\
= & \langle (x_1, x_3, x_2), m_{sh}((x_1, x_2) \otimes x_3)\rangle \\
= & \langle (x_3, x_1, x_2), m_{sh}((x_1, x_2) \otimes x_3)\rangle
\end{aligned}$$

et $\langle \underline{x}, m_{sh}((x_1, x_2) \otimes x_3)\rangle = 0$ pour toute autre mot $\underline{x}$. Donc $m_{sh}((x_1, x_2) \otimes x_3) = (x_1, x_2, x_3) + (x_1, x_3, x_2) + (x_3, x_1, x_2)$.

De façon générale, on a ainsi montré que :

$$m_{sh}(\underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2) = \underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2 \tag{1}$$

où $\times_{sh}$ désigne le produit de battage de deux mots, que l'on décrit brièvement. Le produit de battage de deux mots $\underline{x}^1 = (x^1_1, \dots, x^1_m)$ et $\underline{x}^2 = (x^2_1, \dots, x^2_n)$ est la somme de toutes les permutations de $(x^1_1, \dots, x^1_m, x^2_1, \dots, x^2_n)$, avec multiplicité, pour lesquelles les lettres de $\underline{x}^1$ et celles de $\underline{x}^2$ apparaissent dans leur ordre initial. Par exemple, $(x_1) \times_{sh} (x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) + (x_2, x_1, x_3, x_4) + (x_2, x_3, x_1, x_4) + (x_2, x_3, x_4, x_1)$. On résume toutes ces propriétés dans le

Théorème 2 *Le dual gradué de l'algèbre de Hopf $T(X)$ est donné par l'algèbre de Hopf graduée connexe $coT(X)$ commutative et non-cocommutative. Le produit et le coproduit sont donnés, pour tout mots $\underline{x}^1 = (x^1_1, \dots, x^1_m)$, $\underline{x}^2 = (x^2_{m+1}, \dots, x^2_{m+n})$ et $\underline{x}^3 = (x^3_1, \dots, x^3_n)$ par :*

$$m_{sh}(\underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2) = \underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2 = \sum_{\underline{s} \in sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2)} \underline{s}, \tag{2}$$

$$\Delta_{sh}(\underline{x}^3) = \sum_{i=0}^{n} x^3_1 \dots x^3_i \otimes x^3_{i+1} \dots x^3_n, \tag{3}$$

où dans (2) $sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2)$ désigne l'ensemble des battages de $\underline{x}^1$ et $\underline{x}^2$. L'unité est le mot vide 1 et la counité envoie tout mot non-vide sur 0. L'antipode est donné par $S(x) = -x$ pour tout $x \in X$. $(coT(X), m_{sh}, \Delta_{sh})$ est appelée l'algèbre de Hopf cotensorielle (ou algèbre de Hopf de battage).

1.2 Algèbre de dérivations

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre non associative quelconque. Une *dérivation* D (ou *opérateur différentiel d'ordre 1*) sur A est une application linéaire de A dans A satisfaisant

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

On note $Der(A)$ l'ensemble des dérivations sur A. C'est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, pour le crochet $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$, appelée *algèbre de Lie des dérivations* ou *algèbre des dérivations* de A.

On note $\mathbb{K}\langle\langle Der(A)\rangle\rangle$ l'anneau des séries formelles sur l'alphabet infini $Der(A)$. Précisons que nous considérons l'identité id_A comme l'unique opérateur différentiel d'ordre 0, et nous l'identifions avec l'élément $1 \in \mathbb{K}$. De cette manière, tous les éléments de $\mathbb{K}\langle\langle Der(A)\rangle\rangle$ sont des opérateurs sur A.

On peut munir l'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle Der(A)\rangle\rangle$ d'une structure de cogèbre.

Counité. On note ε l'homomorphisme

$$\varepsilon : \mathbb{K}\langle\langle Der(A)\rangle\rangle \to \mathbb{K} \tag{4}$$

défini en associant à chaque série formelle de $\mathbb{K}\langle\langle Der(A)\rangle\rangle$ son terme constant.

Coproduit. A toute dérivation $D \in \mathbb{K}\langle\langle Der(A)\rangle\rangle$ on associe un opérateur de $A \otimes A$ dans $A \otimes A$, noté $\overline{D}$, par

$$\overline{D}(\phi \otimes \psi) = D\phi \otimes \psi + \phi \otimes D\psi.$$

Si D_1 et D_2 sont deux dérivations, on construit une application naturelle de $A \otimes A$ dans $A \otimes A$ notée $D_1 \otimes D_2$, définit par

$$(D_1 \otimes D_2)(\phi \otimes \psi) = D_1\phi \otimes D_2\psi.$$

Finalement, on définit une application linéaire Δ de $Der(A)$ dans $Der(A) \otimes Der(A)$ par

$$\begin{array}{rcl} Der(A) & \stackrel{\Delta}{\to} & Der(A) \otimes Der(A), \\ D & \mapsto & D \otimes 1 + 1 \otimes D. \end{array}$$

On note que

$$\overline{D} = \Delta(D).$$

De plus, en notant μ l'opérateur linéaire de $A \otimes A$ dans A défini par $\phi \otimes \psi \mapsto \phi \cdot \psi$, on a l'égalité

$$D \circ \mu = \mu \circ \Delta(D).$$

On étend Δ aux mots en l'alphabet (infini) $Der(A)$ en posant $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ et par la formule de récurrence

$$\Delta(B_1B_2) = \Delta(B_1)\Delta(B_2).$$

Lemme 3 *Le triplet $\mathcal{D} = (\mathbb{K}\langle\langle Der(A)\rangle\rangle, \Delta, \varepsilon)$ est une cogèbre.*

Preuve. Par récurrence sur l'ordre des opérateurs. Pour 1, les axiomes sur les cogèbres sont clairement vérifiés. Soit $D \in \mathcal{D}$ une dérivation. On a

$$\begin{array}{rcl} (id_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(D) & = & (id_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)(D \otimes 1 + 1 \otimes D) \\ & = & D \\ & = & (\varepsilon \otimes id_{\mathcal{D}})(D \otimes 1 + 1 \otimes D) \\ & = & (\varepsilon \otimes id_{\mathcal{D}}) \circ \Delta(D) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned}(id_{\mathcal{D}} \otimes \Delta) \circ \Delta(D) &= (id_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)(D \otimes 1 + 1 \otimes D) \\ &= (D \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes D \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes D) \\ &= (\Delta \otimes id_{\mathcal{D}})(D \otimes 1 + 1 \otimes D) \\ &= (\Delta \otimes id_{\mathcal{D}}) \circ \Delta(D).\end{aligned}$$

Soit $B = D_1 \circ D_2 \circ \ldots \circ D_r$. Supposons que les axiomes sont satisfaits pour tout opérateur différentiel d'ordre $< r$ (on vient de voir que c'est vrai pour $r = 1$). Posons $B' = D_1 \circ \ldots \circ D_{r-1}$. On a alors

$$\begin{aligned}(id_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(B) &= (id_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)(\Delta(B')\Delta(D_r)) \\ &= (id_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)(\Delta(B'))(id_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)(\Delta(D_r)) \\ &= (\varepsilon \otimes id_{\mathcal{D}})(\Delta(B'))(\varepsilon \otimes id_{\mathcal{D}})(\Delta(D_r)) \\ &= (\varepsilon \otimes id_{\mathcal{D}})(\Delta(B)),\end{aligned}$$

où on utilise le fait que $(id_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)$ et $(\varepsilon \otimes id_{\mathcal{D}})$ sont des homomorphismes de $\mathbb{K}$-algèbres et l'hypothèse de récurrence à été utilisée à la troisième égalité.
De même, pour le deuxième axiome sur le coproduit, on a

$$\begin{aligned}(id_{\mathcal{D}} \otimes \Delta) \circ \Delta(B) &= (id_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)(\Delta(B')\Delta(D_r)) \\ &= (id_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)(\Delta(B'))(id_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)(\Delta(D_r)) \\ &= (\Delta \otimes id_{\mathcal{D}})(\Delta(B'))(\Delta \otimes id_{\mathcal{D}})(\Delta(D_r)) \\ &= (\Delta \otimes id_{\mathcal{D}})(\Delta(B)).\end{aligned}$$

On termine par linéarité. □

2 Calcul Moulien

On définit les moules et les principales opérations algébriques sur ces objets via les séries formelles non-commutatives associées. On donne la traduction des diverses propriétés algébriques des séries (primitives/group-like) sur les moules associés pour l'algèbre de Hopf $\mathbb{A}$ conduisant aux symétries alternal/symetral.

2.1 Moules

Soit X un alphabet. On utilise les même notations qu'au paragraphe 1.1. La plupart des textes sur le calcul moulien donne la "définition" suivante : *les moules sont des fonctions à un nombre variable de variables.* L'avantage de cette pseudo définition est qu'elle est assez "parlante", et que l'on voit assez bien ce qui se cache sous ce type d'objet. Nous donnons ici la définition suivante :

Définition 4 *Soit X un alphabet et $\mathbb{K}$ un corps. Un moule sur X à valeur dans $\mathbb{K}$ est une application linéaire, notée $M^\bullet$, de $T(X)$ dans $\mathbb{K}$.*

La notation $M^\bullet$ pour désigner une application de $T(X)$ dans $\mathbb{K}$ n'est pas usuelle, mais elle coincide avec la notation utilisée par Jean Ecalle.

Par convention, un moule $M^\bullet$ étant donné, on note $M^{\underline{x}}$ la quantité $M^\bullet(\underline{x})$ pour tout $\underline{x} \in X^*$.

Les différentes propriétés des moules (alternalité, symétralité) proviennent de la contraction avec des *opérateurs non commutatifs* vérifiants certaines *colois spécifiques*. Ces opérateurs interviennent naturellement dans l'étude des champs de vecteurs locaux de $\mathbb{C}^\nu$.

Définition 5 *Soit A une algèbre sur un corps de caractéristique zero $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{B}$ une algèbre d'opérateurs sur A, non commutatifs, munie de la composition (usuelle). On appelle comoule une application linéaire de $T(X)$ dans $\mathcal{B}$. On note*

$$\begin{array}{rcl} X^* & \stackrel{B}{\to} & \mathcal{B} \\ \underline{x} & \mapsto & B_{\underline{x}} = B_{x_n} \dots B_{x_1}. \end{array}$$

On notera un comoule $B_\bullet$. L'objet "contracté" d'un moule et d'un comoule se note alors $P_M = \sum_\bullet M^\bullet B_\bullet$, étant entendu que la somme est faite sur toutes les suites possibles de X^*.

Remarquons que les moules sont en correspondance bijective avec les séries formelles non commutatives de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$. En effet, à tout moule $M^\bullet$ sur X, on associe la série $S(M) = \sum_{\underline{x}\in X^*} M^{\underline{a}}\underline{x}$ et vice versa.

La structure d'algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ se transporte sur l'ensemble des moules sur X à valeur dans $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X)$:

Proposition 6 *L'ensemble $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X)$, muni des opérations*

1. *addition : $S^\bullet = M^\bullet + N^\bullet$ c'est-à-dire $S^{\underline{x}} = M^{\underline{x}} + N^{\underline{x}}, \forall \underline{x} \in X^*$*
2. *produit : $S^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet$ c'est-à-dire $S^{\underline{x}} = \sum_{\underline{x}^1 \bullet \underline{x}^2 = \underline{x}} M^{\underline{x}^1} N^{\underline{x}^2}, \forall \underline{x} \in X^*$,*

forme une algèbre non commutative.
L'opération produit est associative. L'élément neutre pour le produit est le moule $1^\bullet$ défini par

$$1^{\underline{x}} = 1 \text{ si } \underline{x} = \emptyset \text{ et } 1^{\underline{x}} = 0 \text{ sinon }.$$

Nous allons voir que ce passage des séries aux coefficients est souvent intéressant dans de nombreuses applications. Par ailleurs, les différentes propriétés algébriques des séries $S(M)$ se lisent complètement sur le moule associé, ce qui justifie a posteriori la terminologie.

Notons le résultat suivant :

Lemme 7 *L'ensemble des moules $M^\bullet$ tels que $M^\emptyset \neq 0$ forment un groupe, noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K},\times}(X)$, pour l'opération de multiplication.*

Preuve. Soient $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K},\times}(X)$. On note $A^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet$. Par définition, on a $A^\emptyset = M^\emptyset N^\emptyset$. Comme $M^\emptyset \neq 0$ et $N^\emptyset \neq 0$, on en déduit $A^\emptyset \neq 0$.

La carractérisation des moules ayant un inverse multiplicatif se fait par récurrence sur la longueur des suites. Soit $M^\bullet$ un moule possèdant un inverse multiplicatif noté $N^\bullet$, alors on doit avoir $1^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet$, soit

$$1^{\underline{x}} = \sum_{\underline{x}^1\underline{x}^2=\underline{x}} M^{\underline{x}^1} N^{\underline{x}^2}.$$

On a donc une réccurence pour déterminer le moule $N^\bullet$ via la relation

$$1^{\underline{x}} = \sum_{\underline{x}^1\underline{x}^2=\underline{x}, \underline{x}^1\neq\emptyset} M^{\underline{x}^1} N^{\underline{x}^2} + M^\emptyset N^{\underline{x}}.$$

La condition $\underline{x}^1 \neq \emptyset$ fait que les moules $N^{\underline{x}^2}$ intervenant dans la somme sont associés à des suites de longueur inférieur à celle de $\underline{x}$. On peut donc trouver, de manière itérative, l'expression du moule $N^\bullet$ si et seulement si $M^\emptyset \neq 0$. □

Soit $M^\bullet \in \mathcal{M}_{\mathbb{K},\times}(X)$. On notera $(M^\bullet)^{-1}$ le moule inverse.

On peut aussi introduire une opération, appelée *composition*, qui est l'analogue non commutatif de la substitution des séries formelles. Supposons ici que X est un ensemble d'éléments X_ω, indexés par Ω un semi-groupe[1].

Définition 8 *Soit Ω un semi-groupe. On note $\| \cdot \|$ l'application de Ω^* dans Ω définie pour tout $\underline{\omega} = \omega_1 \dots \omega_r$ par*

$$\| \underline{\omega} \| = \omega_1 + \dots + \omega_r.$$

Soient Φ_M et Φ_N les deux séries formelles associées aux moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$:

$$\begin{aligned} \Phi_M &= \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} M^{\underline{\omega}} \underline{\omega}, \\ \Phi_N &= \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} N^{\underline{\omega}} \underline{\omega}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ est gradué par $\| \cdot \|$. La *composante homogène* de degré $\omega' \in \Omega$ de la série non commutative $\Phi_M = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} M^{\underline{\omega}} \underline{\omega}$ est la quantité

$$\Phi_M^{\omega'} = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*, \| \underline{\omega} \| = \omega'} M^{\underline{\omega}} \underline{\omega}.$$

On a : $\Phi_M = \sum_{\omega \in \Omega} \Phi_M^\omega$.

Définition 9 *Soit X un ensemble d'éléments X_ω indexés par un semi-groupe Ω. Soient $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ et Φ_M, Φ_N leurs séries génératrices associées. La substitution de Φ_N dans Φ_M, notée $\Phi_M \circ \Phi_N$, est définie par*

$$\Phi_M \circ \Phi_N = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} M^{\underline{\omega}} \Phi_N^{\underline{\omega}}, \tag{5}$$

où $\Phi_N^{\underline{\omega}}$ est donné par $\Phi_N^{\underline{\omega}} = \Phi_N^{\omega_1} \dots \Phi_N^{\omega_r}$ pour $\underline{\omega} = \omega_1 \dots \omega_r$. Le moule composé $M^\bullet \circ N^\bullet \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ est alors définit par la relation :

$$\Phi_M \circ \Phi_N = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} (M^\bullet \circ N^\bullet)^{\underline{\omega}} \underline{\omega}. \tag{6}$$

L'opération de composition des moules est associative, car la substitution dans l'algèbre des séries formelles l'est. En utilisant $\| \cdot \|$, on peut donner une formule pour le moule composé de deux moules :

Lemme 10 *Soit X un ensemble d'éléments X_ω indexés par un semi-groupe Ω et $M^\bullet$, $N^\bullet$ deux moules dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$. Alors $(M^\bullet \circ N^\bullet)^\emptyset = M^\emptyset$, et pour $\underline{\omega} \in \Omega^*$ tel que $l(\underline{\omega}) \geq 1$:*

$$(M^\bullet \circ N^\bullet)^{\underline{\omega}} = \sum_{r \geq 1, \underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^r = \underline{\omega}, \underline{\omega}^i \neq \emptyset} M^{\|\underline{\omega}^1\| \dots \|\underline{\omega}^r\|} N^{\underline{\omega}^1} \dots N^{\underline{\omega}^r}.$$

[1]Pour simplifier l'exposé, on remplacera parfois la lettre x_ω par l'élément du semi-groupe ω. Dans la suite, lorsque des ω apparaîtront, il faudra comprendre qu'on a considérer un semi-groupe pour coder l'alphabet X.

Preuve. Il suffit de développer l'expression (5). On a

$$\begin{aligned}\Phi_M \circ \Phi_N &= \sum_{\underline{\omega}\in\Omega^*} M^{\underline{\omega}} \Phi_N^{\underline{\omega}} \\ &= \sum_{\underline{\omega}=\omega_1\dots\omega_r\in\Omega^*} M^{\omega_1\dots\omega_r} \left(\sum_{\underline{\omega}^1\in\Omega^*, \|\underline{\omega}^1\|=\omega_1} N^{\underline{\omega}^1} \underline{\omega}^1 \right) \dots \left(\sum_{\underline{\omega}^r\in\Omega^*, \|\underline{\omega}^r\|=\omega_r} N^{\underline{\omega}^r} \underline{\omega}^r \right).\end{aligned} \tag{7}$$

Il reste à réécrire (7) sous la forme $\sum_{\bullet} P^{\bullet}\bullet$. Pour cela, fixons $\underline{\omega} \in \Omega^*$. Le coefficient dans (7) pour toute décomposition

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^r,$$

de $\underline{\omega}$ est donné par

$$M^{\|\underline{\omega}^1\|\dots\|\underline{\omega}^r\|} N^{\underline{\omega}^1} \dots N^{\underline{\omega}^r}.$$

Donc

$$P^{\underline{\omega}} = \sum_{r\geq 1, \underline{\omega}=\underline{\omega}^1\dots\underline{\omega}^r, \underline{\omega}^i\neq\emptyset} M^{\|\underline{\omega}^1\|\dots\|\underline{\omega}^r\|} N^{\underline{\omega}^1} \dots N^{\underline{\omega}^r},$$

ce qui termine la preuve. □

Définition 11 *L'élément neutre pour la composition est le moule noté $I^\bullet$ et définit par*

$$I^\bullet = \begin{cases} 1 \text{ si } l(\bullet) = 1, \\ 0 \text{ sinon }, \end{cases}$$

où $l(\bullet)$ est l'application longueur de la suite.

On a alors le

Théorème 12 *L'algèbre des moules muni des opérations $(+, \times, \circ)$ est une algèbre à composition, c'est-à-dire*
i) $(M^\bullet + N^\bullet) \circ A^\bullet = (M^\bullet \circ A^\bullet) + (N^\bullet \circ A^\bullet)$,
ii) $(M^\bullet \times N^\bullet) \circ A^\bullet = (M^\bullet \circ A^\bullet) \times (N^\bullet \circ A^\bullet)$.

Preuve. Soit $\underline{\omega} = \omega_1 \dots \omega_r \in \Omega^*$. On a

$$\begin{aligned}((M^\bullet + N^\bullet) \circ A^\bullet)^{\underline{\omega}} &= \sum_{s\geq 1, \underline{\omega}^1\dots\underline{\omega}^s=\underline{\omega}, \underline{\omega}^i\neq\emptyset} (M^{\|\underline{\omega}^1\|\dots\|\underline{\omega}^s\|} + N^{\|\underline{\omega}^1\|\dots\|\underline{\omega}^s\|}) A^{\underline{\omega}^1} \dots A^{\underline{\omega}^s} \\ &= (M^\bullet \circ A^\bullet)^{\underline{\omega}} + (N^\bullet \circ A^\bullet)^{\underline{\omega}},\end{aligned}$$

ce qui prouve la première assertion.

Pour ii), on a

$$\begin{aligned}
((M^\bullet \times N^\bullet)\circ A^\bullet)^{\underline{\omega}} &= \sum_{s\geq 1,\underline{\omega}^1\ldots\underline{\omega}^s=\underline{\omega},\underline{\omega}^i\neq\emptyset} (M^\bullet\times N^\bullet)^{\|\underline{\omega}^1\|\ldots\|\underline{\omega}^s\|} A^{\underline{\omega}^1}\ldots A^{\underline{\omega}^s}\\
&= \sum_{s\geq 1,\underline{\omega}^1\ldots\underline{\omega}^s=\underline{\omega},\underline{\omega}^i\neq\emptyset} \left(\sum_{t=0}^{s} M^{\|\underline{\omega}^1\|\ldots\|\underline{\omega}^t\|} N^{\|\underline{\omega}^{t+1}\|\ldots\|\underline{\omega}^s\|}\right) A^{\underline{\omega}^1}\ldots A^{\underline{\omega}^s}\\
&= \sum_{s\geq 1,\underline{\omega}^1\ldots\underline{\omega}^s=\underline{\omega},\underline{\omega}^i\neq\emptyset} \sum_{t=0}^{s} M^{\|\underline{\omega}^1\|\ldots\|\underline{\omega}^t\|} A^{\underline{\omega}^1}\ldots A^{\underline{\omega}^t} N^{\|\underline{\omega}^{t+1}\|\ldots\|\underline{\omega}^s\|} A^{\underline{\omega}^{t+1}}\ldots A^{\underline{\omega}^s}\\
&= \sum_{\underline{\omega}^1\underline{\omega}^2=\underline{\omega}} \left[\left(\sum_{p\geq 1,\underline{\omega}_1^1\ldots\underline{\omega}_1^p=\underline{\omega}^1,\underline{\omega}_1^i\neq\emptyset} M^{\|\underline{\omega}_1^1\|\ldots\|\underline{\omega}_1^p\|} A^{\underline{\omega}_1^1}\ldots A^{\underline{\omega}_1^p}\right)\right.\\
&\quad \left.\times\left(\sum_{q\geq 1,\underline{\omega}_2^1\ldots\underline{\omega}_2^q=\underline{\omega}^2,\underline{\omega}_2^i\neq\emptyset} N^{\|\underline{\omega}_2^1\|\ldots\|\underline{\omega}_2^q\|} A^{\underline{\omega}_2^1}\ldots A^{\underline{\omega}_2^q}\right)\right]\\
&= \sum_{\underline{\omega}^1\underline{\omega}^2=\underline{\omega}} \left((M^\bullet\circ A^\bullet)^{\underline{\omega}^1}\right)\left((N^\bullet\circ A^\bullet)^{\underline{\omega}^2}\right)\\
&= ((M^\bullet\circ A^\bullet)\times(N^\bullet\circ A^\bullet))^{\underline{\omega}}
\end{aligned}$$

□

2.2 Éléments primitifs et group-like de $\mathbb{A}$

Notons $C(X)$ l'ensemble des couples de suites de X^* ; on note un couple de suites $\langle \underline{x}^1; \underline{x}^2\rangle = \langle (x_1^1,\ldots,x_n^1);(x_1^2,\ldots,x_n^2)\rangle$. A chaque $\underline{x}\in X^*$, soit $C_{\underline{x}}$ le sous-ensemble de $C(X)$ de couples de suites "engendré" par $\Delta(\underline{x})$, c'est-à-dire apparaissant dans l'expression de $\Delta(\underline{x})$.

Exemples.

- Pour $r=0$, on a

$$\Delta(\emptyset)=\Delta(1)=1\otimes 1=\emptyset\otimes\emptyset$$

donc

$$C_\emptyset = \{\langle\emptyset;\emptyset\rangle\}\,.$$

- Pour $r=1$, on a

$$\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$$

donc

$$C_x = \{\langle x;\emptyset\rangle, \langle\emptyset;x\rangle\}\,.$$

- Pour $r=2$, on a $\underline{x}=(x_1,x_2)$ et

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1x_2) &= \Delta(x_1)\Delta(x_2)\\
&= (x_1\otimes 1+1\otimes x_1)(x_2\otimes 1+1\otimes x_2)\\
&= x_1x_2\otimes 1 + x_2\otimes x_1 + x_1\otimes x_2 + 1\otimes x_1x_2\\
&= \underline{x}\otimes\emptyset + x_2\otimes x_1 + x_1\otimes x_2 + \emptyset\otimes\underline{x}.
\end{aligned}$$

donc

$$C_{\underline{x}=(x_1,x_2)} = \{\langle\underline{x};\emptyset\rangle, \langle x_1;x_2\rangle, \langle x_2;x_1\rangle\ , \langle\emptyset;\underline{x}\rangle\}\,.$$

Soit $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in X^*$. L'action de Δ sur $\underline{x}$ donne une expression de la forme

$$\Delta(\underline{x}) = \underline{x} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{x} + \sum_{\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle \in \widetilde{C}_{\underline{x}}} \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \tag{8}$$

où $\widetilde{C}_{\underline{x}} = C_{\underline{x}} \backslash \{ \langle \underline{x} ; \emptyset \rangle, \langle \emptyset ; \underline{x} \rangle \}$.

Proposition 13 *Soit $\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle$ un couple de suites. L'ensemble des mots $\underline{s}$ telles que $\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle$ soit dans $C_{\underline{s}}$ est donné par l'ensemble de battage $sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2)$.*

Preuve. En effet,

$$\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle \in C_{\underline{s}} \Leftrightarrow \left\langle \Delta(\underline{s}), \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2 \right\rangle = 1 \Leftrightarrow \left\langle \underline{s}, \underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2 \right\rangle = 1 \Leftrightarrow \underline{s} \in sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2).$$

□

Définition 14 *Un moule $M^\bullet$ est dit alternal si $M^\emptyset = 0$ et*

$$M^{\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2} = \sum_{\underline{x} \in sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2)} M^{\underline{x}} = 0, \ \forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in X^* \backslash \{1\}.$$

Autrement dit, $M^\bullet$ est une ε-dérivation de l'algèbre de Hopf $coT(X)$, c'est-à-dire

$$M^{\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2} = M^{\underline{x}^1} \varepsilon(\underline{x}^2) + \varepsilon(\underline{x}^1) M^{\underline{x}^2}, \ \forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in X^*.$$

Le but de ce qui suit est de démontrer que l'*alternalité* d'un moule exprime sa *primitivité* en tant qu'élément de la cogèbre $\mathbb{A}$. On a déjà le

Lemme 15 *Un élément primitif $P \in \mathbb{A}$ a un terme constant égal à 0.*

Preuve. En effet, si le terme constant de P (c'est-à-dire le coefficient de 1) est égal à $a \in \mathbb{K}$, alors le terme constant de $\Delta(P)$ est égal à $a(1 \otimes 1)$ alors que le terme constant de $P \otimes 1 + 1 \otimes P$ est égal à $a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Si P est primitif, on a donc $a \otimes 1 + 1 \otimes a = a(1 \otimes 1)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
(a+1) \otimes (a+1) &= a \otimes a + a \otimes 1 + 1 \otimes a + 1 \otimes 1 \\
&= a \otimes a + a(1 \otimes 1) + 1 \otimes 1 \\
&= (a^2 + a + 1)(1 \otimes 1),
\end{aligned}$$

soit, $(a+1)^2 = a^2 + a + 1$, et donc $a = 0$. □

Proposition 16 *On note $X^{*,r}$ l'ensemble des mots de longueur r construits sur X. L'élément $\sum_{\underline{x} \in X^{*,r}} M^{\underline{x}} \underline{x}$ est un élément primitif si et seulement si pour tout couple de suites $\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle$ avec $l(\underline{x}^1) = n > 0, l(\underline{x}^2) = m > 0, n + m = r$, on a*

$$\sum_{\underline{x} \in sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2)} M^{\underline{x}} = 0. \tag{9}$$

Preuve. Posons

$$P = \sum_{\underline{x} \in X^{*,r}} M^{\underline{x}} \underline{x}.$$

En utilisant (8), on voit que

$$\begin{aligned}\Delta(P)=\Delta\left(\sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\underline{x}\right) &= \sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\Delta(\underline{x}) \\ &= \sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}(\underline{x}\otimes 1+1\otimes\underline{x})+R, \\ &= P\otimes 1+1\otimes P+R,\end{aligned} \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\left(\sum_{\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle\in\widetilde{C}_{\underline{x}}} \underline{x}^1\otimes\underline{x}^2\right) \\ &= \sum_{\underline{x}^1\neq\emptyset,\underline{x}^2\neq\emptyset,l(\underline{x}^1)+l(\underline{x}^2)=r}\left(\sum_{\underline{x}\in sh(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} M^{\underline{x}}\right)\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2, \\ &= \sum_{\underline{x}^1\neq\emptyset,\underline{x}^2\neq\emptyset,l(\underline{x}^1)+l(\underline{x}^2)=r} M^{\underline{x}^1\times_{sh}\underline{x}^2}\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2.\end{aligned}$$

Par définition, $\sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\underline{x}$ est un élément primitif si et seulement si $R=0$, c'est-à-dire si on a la condition (9). □

Théorème 17 *Un élément* $P=\sum_{\underline{x}\in X^*} M^{\underline{x}}\underline{x}\in\mathbb{A}$ *est un élément primitif si et seulement si le moule associé* $M^\bullet$ *est un moule alternal.*

Preuve. On peut écrire P comme somme de composantes homogènes $P=\sum_{n\geq 0} P_n$. Or si P_n est primitif pour chaque $n\geq 0$,

$$\Delta(P)=\sum_{n\geq 0}\Delta(P_n)=\sum_{n\geq 0}(P_n\otimes 1+1\otimes P_n)=P\otimes 1+1\otimes P,$$

donc P est primitif. Inversement, si P est primitif, alors

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= P\otimes 1+1\otimes P=\sum_{n\geq 0}\Delta(P_n) \\ &= \sum_{n\geq 0}(P_n\otimes 1+1\otimes P_n+R_n) \\ &= P\otimes 1+1\otimes P+\sum_{n\geq 0} R_n.\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n\geq 0} R_n=0$, et comme il s'agit d'une série formelle non commutative, chaque partie homogène $R_n=0$. On obtient donc $\Delta(P_n)=P_n\otimes 1+1\otimes P_n$ pour tout $n\geq 0$, c'est-à-dire P_n est primitif.

On peut donc raisonner composante homogène par composante homogène. Supposons donc P primitif ; alors chaque P_n est primitif, et par la proposition 16, la partie homogène $M_n^\bullet$ du moule $M^\bullet$ est alors alternal. Donc $M^\bullet$ est alternal. Inversement, si $M^\bullet$ est alternal, alors chaque $M_n^\bullet$ l'est, donc P_n est primitif, donc P est primitif. □

Rappelons qu'un élément $P\in\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ est group-like s'il vérifie $\Delta(P)=P\otimes P$. On a tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 18 *Si $P \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ est group-like, alors :*
i) P n'est pas un polynôme.
ii) le terme constant de P est égal à 1.

Preuve. Soit donc $P \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ un élément group-like.

i) Définissons la "longueur" d'un produit tensoriel $P_1 \otimes P_2$ de deux monômes comme étant la somme $n+m$ où n est la longueur de P_1 en tant que monôme et m la longueur de P_2. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ et soit M le monôme le plus long apparaissant dans P. Alors on voit que la longueur de chaque terme apparaissant dans $\Delta(P)$ est inférieure ou égale à la longueur de M, alors que le terme $M \otimes M$, deux fois trop long, apparaît dans $P \otimes P$. Ceci montre que si un élément de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ a une chance d'être group-like, il doit s'agir d'une série formelle.

ii) De même, $\Delta(P)$ fait apparaitre des couples $\langle 1; \underline{x}\rangle$ ou $\langle \underline{x}; 1\rangle$, ce qui n'est possible dans $\Delta(P) = P \otimes P$ que si on fait intervenir la suite vide. La série P doit donc avoir un terme constant $a \neq 0$. La condition $\Delta(P) = P \otimes P$ implique alors que ce terme constant vérifie $a(1 \otimes 1) = a \otimes a$, et donc $a = 1$.

□

Considérons donc les moules de la forme

$$\sum_{\underline{x} \in X^*} M^{\underline{x}} \underline{x},$$

avec $M^{\emptyset} = 1$.

Définition 19 *Un moule $M^\bullet$ est dit symétral si*

$$M^{\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2} = \sum_{\underline{x} \in sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2)} M^{\underline{x}} = M^{\underline{x}^1} M^{\underline{x}^2}, \ \forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in X^*,$$

c'est-à-dire si $M^\bullet$ est un morphisme d'algèbres de $coT(X)$ dans $\mathbb{K}$.

Théorème 20 *Un élément $\sum_{\underline{x} \in X^*} M^{\underline{x}} \underline{x} \in \mathbb{A}$ est group-like si et seulement si $M^\bullet$ est un moule symétral.*

Preuve. Soit $P = 1 + Q = 1 + \sum_{\underline{x} \neq \emptyset} M^{\underline{x}} \underline{x}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta(P) &= 1 \otimes 1 + \sum_{\underline{x} \in X^* \setminus \{1\}} M^{\underline{x}} \Delta(\underline{x}), , \\
&= 1 \otimes 1 + Q \otimes 1 + 1 \otimes Q + \sum_{\underline{x} \in X^* \setminus \{1\}} M^{\underline{x}} \left(\sum_{\langle \underline{x}^1; \underline{x}^2 \rangle \in \widetilde{C}_{\underline{x}}} \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2 \right), \\
&= 1 \otimes 1 + Q \otimes 1 + 1 \otimes Q + \sum_{\underline{x}^1 \neq \emptyset, \underline{x}^2 \neq \emptyset} \left(\sum_{\underline{x} \in sh(\underline{x}^1, \underline{x}^2)} M^{\underline{x}} \right) \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \\
&= 1 \otimes 1 + Q \otimes 1 + 1 \otimes Q + \sum_{\underline{x}^1 \neq \emptyset, \underline{x}^2 \neq \emptyset} M^{\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2} \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, $\Delta(P) = 1 \otimes 1 + Q \otimes 1 + 1 \otimes Q + Q \otimes Q$, avec

$$Q \otimes Q = \sum_{\underline{x}^1 \neq \emptyset, \underline{x}^2 \neq \emptyset} M^{\underline{x}^1} M^{\underline{x}^2} \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2.$$

Ainsi, P est group-like si et seulement si $M^{\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2} = M^{\underline{x}^1} M^{\underline{x}^2}$, c'est-à-dire si $M^\bullet$ est symétral. □

La propriété de symétralité est stable pour la multiplication. Plus précisément,

Proposition 21 *Les ensembles des moules symétrals, muni de la multiplication, est un sous-groupe de $\mathcal{M}_{\mathbb{K},\times}(X)$. De plus, l'inverse multiplicatif d'un moule symétral $M^\bullet$ est donné pour tout $\underline{x} \in X^*$ par*

$$(M^{\underline{x}})^{-1} = (-1)^{l(\underline{x})} M^{ret(\underline{x})},$$

où $ret : X^* \to X^*$ est l'involution qui à tout mot $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ associe $ret(\underline{x}) = (x_n, \dots, x_1)$.

Preuve. Considérons deux moules symétrals $M^\bullet$ et $N^\bullet$. Ce sont des morphismes d'algèbres de $coT(X)$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire des caractères de $coT(X)$. Alors, si $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2 \in X^*$,

$$\begin{aligned}
(M^\bullet \times N^\bullet)(\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2) &= m \circ (M^\bullet \otimes N^\bullet) \circ \Delta_{sh}(\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2) \\
&= m \circ (M^\bullet \otimes N^\bullet) \circ \Delta_{sh} \circ m_{sh}(\underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2) \\
&= m \circ (M^\bullet \otimes N^\bullet) \circ (m_{sh} \otimes m_{sh}) \circ \Delta_{sh}(\underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2) \\
&= \sum_{\underline{y}^1 \underline{y}^2 = \underline{x}^1, \underline{z}^1 \underline{z}^2 = \underline{x}^2} M^{\underline{y}^1 \times_{sh} \underline{z}^1} N^{\underline{y}^2 \times_{sh} \underline{z}^2} \\
&= \sum_{\underline{y}^1 \underline{y}^2 = \underline{x}^1, \underline{z}^1 \underline{z}^2 = \underline{x}^2} M^{\underline{y}^1} M^{\underline{z}^1} N^{\underline{y}^2} N^{\underline{z}^2} \\
&= (M^\bullet \times N^\bullet)(\underline{x}^1)(M^\bullet \times N^\bullet)(\underline{x}^2).
\end{aligned}$$

Ainsi le moule $M^\bullet \times N^\bullet$ est symétral. L'inverse multiplicatif d'un moule symétral $M^\bullet$ est alors donné par $M^\bullet \circ S_{sh}$ qui est bien un moule symétral : si $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2 \in X^*$,

$$(M^\bullet \circ S_{sh})(\underline{x}^1 \times_{sh} \underline{x}^2) = M^{\underline{x}^2 \times_{sh} \underline{x}^1} = M^{\underline{x}^2} M^{\underline{x}^1} = M^{\underline{x}^1} M^{\underline{x}^2}.$$

On peut alors expliciter $(M^{\underline{x}})^{-1}$: si $\underline{x} \in X^*$,

$$\begin{aligned}
(M^\bullet \circ S_{sh})(\underline{x}) &= M^{(-1)^n (x_n, \dots, x_1)} \\
&= (-1)^{l(\underline{x})} M^{ret(\underline{x})}.
\end{aligned}$$

□

3 Théorie des formes normales de champs de vecteurs

Le but de cette partie est de montrer le langage des moules et comoules en action sur le problème de la recherche des formes normales de champs de vecteurs de $\mathbb{C}^\nu$. On démontre la version moulienne du théorème classique de Poincaré pour les champs de vecteurs analytiques locaux. Cette démonstration donne une expression explicite du normalisateur[2] et permet de mettre en évidence des coefficients "universels" dans ce problème, qui sont justement des moules. On s'interesse enfin à la convergence des séries mouliennes ainsi obtenues.

[2]C'est-à-dire du changement de variable.

3.1 Champs de vecteurs

Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$. On considère un champ de vecteur de $\mathbb{C}^\nu$ de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \partial_{x_i},$$

où on note $\partial_{x_i} = \partial / \partial_{x_i}$ la dérivée partielle par rapport à x_i et où $X_i : \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}$ est une série analytique en les $x_1, \ldots, x_\nu$, ce qu'on notera $X_i \in \mathbb{C}\{x\}$.

Nous étudions les champs de vecteurs *locaux*, c'est-à-dire tels que

$$X_i(0) = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, \nu\}.$$

On cherche à "simplifier" l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$, c'est-à-dire à la transformer, par un changement de variable adéquat, en une équation plus simple, qu'on sache éventuellement résoudre ; dans tous les cas on cherche ainsi à obtenir une classification des champs de vecteurs : c'est la recherche d'une *forme normale.*

On commence par donner la décomposition homogène d'un champ de vecteurs X. Pour $\underline{n} \in \mathbb{Z}^\nu$, on notera $x^{\underline{n}}$ le produit $x_1^{n_1} \ldots x_\nu^{n_\nu}$. Un *opérateur différentiel homogène* de degré $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_\nu)$, noté $D_{\underline{n}}$, vérifie : pour $\underline{m} \in \mathbb{Z}^\nu$, il existe un $c_{\underline{n},\underline{m}}$ complexe tel que :

$$D_{\underline{n}}(x^{\underline{m}}) = c_{\underline{n},\underline{m}} x^{\underline{n}+\underline{m}}. \tag{11}$$

On décompose alors le champ X sous la forme de sa partie linéaire et d'une somme d'opérateurs différentiels homogènes. Ecrivons pour cela

$$X_i(x) = \sum_{\underline{\omega} \in \mathbb{N}^\nu} b_{i,\underline{\omega}} x^{\underline{\omega}},$$

où les $b_{i,\underline{\omega}}$ sont des complexes. Alors

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\underline{\omega} \in \mathbb{N}^\nu} b_{i,\underline{\omega}} x^{\underline{\omega}} \partial_{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\underline{\omega} \in \mathbb{N}^\nu} b_{i,\underline{\omega}} x^{\widehat{\underline{\omega}}_i} x_i \partial_{x_i}, \end{aligned}$$

où $\widehat{\underline{\omega}}_i = (\omega_1, \ldots, \omega_i - 1, \ldots, \omega_\nu)$ est également le degré de l'opérateur $b_{i,\underline{\omega}} x^{\widehat{\underline{\omega}}_i} x_i \partial_{x_i}$. On remarque ici que ce degré est un ν-uplet d'entiers positifs sauf au plus un qui vaut -1. Ainsi,

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\underline{\omega} \in \mathbb{N}^\nu, \widehat{\underline{\omega}}_i = \underline{n}} b_{i,\underline{\omega}} x^{\widehat{\underline{\omega}}_i} x_i \partial_{x_i} \\ &= \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^\nu} x^{\underline{n}} \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{\underline{\omega} \in \mathbb{N}^\nu, \widehat{\underline{\omega}}_i = \underline{n}} b_{i,\underline{\omega}} \right) x_i \partial_{x_i}. \end{aligned} \tag{12}$$

La somme $\beta_i^{\underline{n}} = \left(\sum_{\underline{\omega} \in \mathbb{N}^\nu, \widehat{\underline{\omega}}_i = \underline{n}} b_{i,\underline{\omega}} \right)$ est bien finie car elle contient au plus un seul terme. La partie linéaire correspond au degré $\underline{n} = (0, \ldots, 0)$ et on obtient donc :

$$X = X_{lin} + \sum_{\underline{n} \in A(X)} D_{\underline{n}}, \tag{13}$$

où $A(X)$ est l'*alphabet* du champs X, c'est-à-dire l'ensemble des degrés des opérateurs différentiels homogènes intervenant dans la décomposition de X. Ces degrés sont donc des ν-uplets d'entiers positifs sauf un au plus qui vaut -1. De plus, pour $\underline{n}$ dans $A(X)$, $\sum_{i=1}^{\nu} n_i \geq 1$.

Exemple. Soit $X(x,y)$ un champ de vecteurs de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$X(x,y) = \lambda x\partial_x + \beta y\partial_y + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)\partial_x + (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)\partial_y.$$

où $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $b_{ij} \in \mathbb{C}$ pour $i+j=2,\ i,j \in \mathbb{N}$.

La décomposition (13) s'écrit

$$X = X_{lin} + D_{1,0} + D_{0,1} + D_{-1,2} + D_{2,-1},$$

où $X_{lin} = \lambda x\partial_x + \beta y\partial_y$, et

$$\begin{aligned} D_{1,0} &= a_{20}x^2\partial_x + b_{11}xy\partial_y, \\ D_{0,1} &= a_{11}yx\partial_x + b_{02}y^2\partial_y, \\ D_{-1,2} &= a_{02}y^2\partial_x, \\ D_{2,-1} &= b_{20}x^2\partial_y. \end{aligned}$$

On a donc $A(X) = \{(1,0),(0,1),(-1,2),(2,-1)\}$.

Dans la suite, on supposera toujours que la partie linéaire du champ est sous forme *diagonale*, c'est-à-dire

$$X_{lin} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i},$$

où $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$ est le *spectre* de X_{lin}.

Le champ est alors dit *sous forme préparé* par Ecalle. Cette condition n'est pas restrictive si on se place dans la classe des champs de vecteurs formels. En effet, en suivant Martinet [6], tout champ de vecteur formel peut, via un difféomorphisme formel, se mettre sous la forme

$$X = X_{lin} + X_N,$$

où X_{lin} est linéaire diagonale et X_N est nilpotent, avec $[X_{lin}, X_N] = 0$. Evidemment, le champ X_N n'est déterminé que modulo l'action du groupe des difféomorphismes formels laissant X_{lin} invariant.

On a alors la notion de champ de vecteur résonant :

Définition 22 *Etant donné un champ de vecteur X dont le spectre de la partie linéaire X_{lin} est $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$, on dit que X vérifie une relation de résonance, ou est résonant, si :*

$$\exists \underline{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in A(X)^*, \parallel \underline{\omega} \parallel = 0,$$

où $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{C}^r$ est le vecteur défini par $\omega_i = s_i \cdot \underline{\lambda}, i = 1, \ldots, r$.

Comme X est un champ de vecteurs, c'est une dérivation sur l'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ en ν variables. Les D_n sont donc des dérivations et d'après la décomposition (12) :

$$D_{\underline{n}} = x^{\underline{n}} \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^{\underline{n}} x_i \partial_{x_i},\ \beta_i^{\underline{n}} \in \mathbb{C},$$

et le coefficient $c_{\underline{n},\underline{m}}$ de l'écriture (11) vaut :

$$c_{\underline{n},\underline{m}} = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^{\underline{n}} m_i = \beta^{\underline{n}} \cdot m.$$

Enfin, on remarquera qu'un tel opérateur peut s'écrire de la manière suivante :

$$D_{\underline{n}} = \sum_{i=1}^{\nu} D_{\underline{n}}(x_i)\partial_{x_i},$$

où $D_{\underline{n}}(x_i)$ est la fonction donnée par l'action de $D_{\underline{n}}$ sur la fonction $x \mapsto x_i$.

3.2 Conjugaison des champs de vecteurs analytiques locaux

Soit X un champ de vecteur sous forme préparée. On regarde l'effet d'un changement de variable (formel ou non) sur X. On note x les variables initiales dans lesquelles est explicité X.

On considère un changement de variable $x = h(y)$. On note Θ l'opérateur de substitution associé à h, défini pour tout $\phi \in \mathbb{C}[[x]]$ par

$$\Theta\phi = \phi \circ h,\ \Theta^{-1}\phi = \phi \circ h^{-1}.$$

On a alors la

Proposition 23 *L'opérateur de changement de variable Θ est un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$.*

Preuve. L'application Θ est $\mathbb{C}$-linéaire, et h étant un difféomorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$, l'application $\phi \mapsto \phi \circ h^{-1}$ est bien définie et correspond à Θ^{-1}. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \Theta(\phi\psi) &= (\phi\psi) \circ h \\ &= (\phi \circ h)(\psi \circ h) \\ &= \Theta(\phi)\Theta(\psi), \end{aligned}$$

et Θ est bien un morphisme de $\mathbb{C}[[x]]$. □

Remarque. Connaissant l'automorphisme Θ, on retrouve le changement de variable associé en appliquant Θ à l'application identité de $\mathbb{C}^\nu$.

Définition 24 *Soit X un champ de vecteur analytique local de $\mathbb{C}^\nu$. Un champ X_{conj} est dit conjugué de X, s'il existe un changement de variable h tel que*

$$X_{conj} = \Theta X \Theta^{-1},$$

où Θ est l'opérateur de substitution associé à h.

L'origine de ces équations de conjugaison est la suivante : Un champ de vecteur X en x est une dérivation sur les germes de fonctions en x. Soit h un difféomorphisme. L'image de X par h^{-1} [3] est un champ de vecteur en $y = h^{-1}(x)$, donc une dérivation sur les germes de fonctions en y. Notons X_{conj} ce champ image. Comment lui donner un sens ? Soit ϕ un germe de fonction en $h^{-1}(x)$, alors $\phi \circ h^{-1}$ est un germe de fonction en x. On peut faire agir X dessus, et on obtient le germe $X(\phi \circ h^{-1})$ en x. Comme $X_{conj}(\phi)$ doit être un germe en $h^{-1}(x)$, on transporte $X(\phi \circ h^{-1})$ par h à droite, soit $X(\phi \circ h^{-1}) \circ h$. Cette fonction est définie sur un voisinage de $y = h^{-1}(x)$, c'est donc un germe de fonctions en y. Une définition est donc $X_{conj}(\phi) = \Theta X \Theta^{-1}(\phi)$ pour tout

[3] Rappelons que l'on cherche un changement de variable $x = h(y)$, où x est le système de coordonnées initial.

germe de fonctions ϕ en $h(x)$, où Θ est l'automorphisme de substitution associé à h. On renvoie à [5] pour plus de détails.

La conjugaison est dite *formelle* (resp. *analytique*) si le changement de variables associé est formel (resp. analytique). L'opérateur Θ est appelé le *normalisateur* du champ X. Lorsque $X_{conj} = X_{lin}$, on parle de *linéarisation.*

Remarque. On peut imposer des contraintes sur la forme des objets conjugués. Si le champ conjugué ne contient que des termes résonnants, on parle de prénormalisation. Si de plus, le nombre de ces termes est minimal parmis toutes les formes prénormales, on parle de normalisation. On renvoie à [2] pour plus de détails.

Soit X un champ de vecteur analytique local, d'alphabet $A(X)$. Commençons par écrire X sous forme moulienne :

$$X = X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} D_{\bullet},$$

où $I^{\bullet}$ est le moule élément neutre pour la composition des moules.

Soit Na un automorphisme de conjuguaison de X. Comme Na est un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$, on peut le chercher sous la forme

$$Na = \sum_{\underline{s} \in A(X)^*} Na^{\underline{s}} D_{\underline{s}},$$

avec $Na^{\bullet}$ un moule symétral.[4]

Via ce changement de variables, on obtient un objet conjugué de la forme

$$X_{conj} = X_{lin} + \sum_{\underline{s} \in A(X)^*} Ca^{\underline{s}} D_{\underline{s}},$$

où le moule $Ca^{\bullet}$ est alternal.

Dans ce cas, X_{conj} est bien une dérivation de $\mathbb{C}[[x]]$.

L'équation de conjugaison pour un champ de vecteur s'écrit donc en terme moulien sous la forme

$$X_{lin} + \sum_{\bullet} Ca^{\bullet} D_{\bullet} = \left(\sum_{\bullet} Na^{\bullet} D_{\bullet} \right) \left(X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} D_{\bullet} \right) \left(\sum_{\bullet} (Na^{\bullet})^{-1} D_{\bullet} \right). \tag{14}$$

Théorème 25 *L'équation de conjugaison (14) est équivalente à l'équation moulienne*

$$Na^{\bullet} \times \bigtriangledown (Na^{-1})^{\bullet} + Na^{\bullet} \times I^{\bullet} \times (Na^{-1})^{\bullet} = Ca^{\bullet},$$

où $\bigtriangledown$ est la dérivation moulienne définie par

$$(\bigtriangledown M^{\bullet})^{\underline{\omega}} = (\underline{\lambda} \cdot \parallel \underline{\omega} \parallel) M^{\underline{\omega}}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 26 *Soient $\phi(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{\nu}} a_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]$, et B_{n^i}, $i = 1, \ldots, r$, une famille d'opérateurs différentiels homogènes de degré $n^i \in \mathbb{Z}^{\nu}$ satisfaisant*

$$B_{n^i}(x^m) = \beta_m^{n^i} x^{m+n^i}, \ \beta_m^{n^i} \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

[4]Rappelons qu'ici la notion d'éléments primitifs (resp. group-like) correspond aux dérivations (resp. automorphismes) de l'algèbre sous-jacente.

On a :

$$B_{\underline{n}}\phi(x) = B_{n^1}\dots B_{n^r}\phi(x) = \sum_m a_m(\beta_m^{n^r})(\beta_{m+n^r}^{n^{r-1}})\dots(\beta_{m+n^r+\dots+n^2}^{n^1})x^{m+n^r+\dots+n^1}. \tag{16}$$

Preuve. On a

$$B_{\underline{n}} = B_{n^1}\dots B_{n^r}\phi(x) = \sum_m a_m B_{n^1}\dots B_{n^r}(x^m),$$

et la formule (15) permet de conclure. □

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 27 *Pour toute suite* $\underline{n}$*, on a*

$$X_{lin}B_{\underline{n}} = (\underline{\lambda}\cdot \parallel \underline{n} \parallel)B_{\underline{n}} + B_{\underline{n}}X_{lin}.$$

Preuve. On a, en utilisant (16) :

$$B_{\underline{n}}\phi(x) = \sum_m a_m(\beta_m^{n^r})(\beta_{m+n^r}^{n^{r-1}})\dots(\beta_{m+n^r+\dots+n^2}^{n^1})x^{m+n^r+\dots+n^1}.$$

Comme $X_{lin}(x^m) = (\underline{\lambda}\cdot m)x^m$, on en déduit

$$X_{lin}B_{\underline{n}}\phi(x) = \sum_m a_m(\beta_m^{n^r})(\beta_{m+n^r}^{n^{r-1}})\dots(\beta_{m+n^r+\dots+n^2}^{n^1})(\underline{\lambda}\cdot(m+n^r+\dots+n^1))x^{m+n^r+\dots+n^1},$$

soit

$$\begin{aligned} X_{lin}B_{\underline{n}}\phi(x) &= \sum_m a_m(\beta_m^{n^r})(\beta_{m+n^r}^{n^{r-1}})\dots(\beta_{m+n^r+\dots+n^2}^{n^1})(\underline{\lambda}\cdot \parallel \underline{n} \parallel)x^{m+n^r+\dots+n^1} \\ &\quad + \sum_m a_m(\beta_m^{n^r})(\beta_{m+n^r}^{n^{r-1}})\dots(\beta_{m+n^r+\dots+n^2}^{n^1})(\underline{\lambda}\cdot m)x^{m+n^r+\dots+n^1} \\ &= (\underline{\lambda}\cdot \parallel \underline{n} \parallel)B_{\underline{n}}\phi(x) + B_{\underline{n}}X_{lin}\phi(x). \end{aligned}$$

□

Preuve. (du théorème 25) On a, en utilisant le corollaire 27

$$X_{lin}\left(\sum_\bullet M^\bullet D_\bullet\right) = \sum_\bullet \nabla M^\bullet D_\bullet + \sum_\bullet M^\bullet D_\bullet X_{lin}.$$

La multiplication à gauche par Θ donne

$$\Theta X_{lin}\Theta^{-1} = \sum_\bullet \Theta^\bullet \times \nabla(\Theta^\bullet)^{-1}D_\bullet + \sum_\bullet \Theta^\bullet(\Theta^\bullet)^{-1}D_\bullet X_{lin}.$$

Comme $\Theta^\bullet(\Theta^\bullet)^{-1} = 1^\bullet$, on a

$$\sum_\bullet \Theta^\bullet(\Theta^\bullet)^{-1}D_\bullet X_{lin} = X_{lin},$$

soit

$$\Theta X_{lin}\Theta^{-1} = \sum_\bullet \Theta^\bullet \times \nabla(\Theta^\bullet)^{-1}D_\bullet + X_{lin}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
X_{lin}+\sum_\bullet Ca^\bullet D_\bullet &= \left(\sum_\bullet Na^\bullet D_\bullet\right)\left(X_{lin}+\sum_\bullet I^\bullet D_\bullet\right)\left(\sum_\bullet (Na^\bullet)^{-1}D_\bullet\right)\\
&= \left(\sum_\bullet Na^\bullet D_\bullet\right)(X_{lin})\left(\sum_\bullet (Na^\bullet)^{-1}D_\bullet\right)\\
&\quad +\left(\sum_\bullet Na^\bullet D_\bullet\right)\left(\sum_\bullet I^\bullet D_\bullet\right)\left(\sum_\bullet (Na^\bullet)^{-1}D_\bullet\right)\\
&= \sum_\bullet Na^\bullet \times \triangledown (Na^\bullet)^{-1}D_\bullet + X_{lin} + \sum_\bullet Na^\bullet \times I^\bullet \times (Na^\bullet)^{-1}D_\bullet .
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. □

3.3 Linéarisation formelle

Dans cette section, on redémontre le théorème de linéarisation formelle de Poincaré. L'outil moulien permet de renouveler son approche, en mettant en évidence des coefficients "universels" de linéarisation, qui n'apparaissaient pas dans la littérature classique du sujet.

Considérons le cas "idéal" de la linéarisation, c'est-à-dire celui pour lequel on a $X_{nor} = X_{lin}$. On cherche alors le normalisateur Na tel que

$$X_{lin} = NaXNa^{-1},$$

ou, ce qui revient au même

$$X = Na^{-1}X_{lin}Na.$$

Par construction, nous supposons que Na est de la forme

$$Na = \sum_\bullet Na^\bullet D_\bullet,$$

c'est-à-dire dans $\mathcal{D}$. On a $Na^{-1} = \sum_\bullet (Na^\bullet)^{-1}D_\bullet$. L'équation de linéarisation donne

$$\left(\sum_\bullet (Na^\bullet)^{-1}D_\bullet\right) X_{lin} \left(\sum_\bullet Na^\bullet D_\bullet\right) = X_{lin} + \sum_\bullet I^\bullet D_\bullet,$$

où $I^\bullet$ est toujours le moule élément neutre pour la composition.

On en déduit l'égalité suivante sur les moules, en reprenant le calcul fait dans la preuve du théorème 25,

$$(Na^\bullet)^{-1} \times \triangledown Na^\bullet = I^\bullet,$$

où $\triangledown$ est la dérivation sur l'algèbre des moules définie par $(\triangledown M^\bullet)^{\underline{\omega}} = (\underline{\lambda}\cdot \parallel \underline{\omega} \parallel)M^{\underline{\omega}}$. On a donc la formule de récurrence[5] suivante :

$$\triangledown Na^\bullet = Na^\bullet \times I^\bullet. \tag{17}$$

Nous avons donc la version explicite[6] suivante du théorème de Poincaré :

[5]Comme nous allons le voir, cette formule définit le moule $Na^\bullet$ par récurrence sur la longueur des mots, ce qui n'est pas évident à priori.

[6]Le normalisateur est donné explicitement.

Théorème 28 *Soit* $X = X_{lin} + \sum_{n\in A(X)} D_n$ *un champ de vecteur local de* $\mathbb{C}^\nu$ *non résonnant sous forme bien préparé. Alors,* X *est formellement linéarisable, par un automorphisme formel de* $\mathbb{C}[[x]]$ *de la forme*

$$Na = \sum_\bullet Na^\bullet D_\bullet,$$

avec pour tout $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in A(X)^*$,

$$Na^{\underline{s}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\ldots(\omega_1+\ldots+\omega_r)},$$

où $\omega_i = s_i \cdot \underline{\lambda}$.

Preuve. On calcule $Na^\bullet$ par récurrence sur la longueur des suites. On a $Na^\emptyset = 1$ par hypothèse. Pour $l(s) = 1$, on a, avec (17),

$$(\underline{\lambda}\cdot \parallel s \parallel) Na^s = Na^s I^\emptyset + Na^\emptyset I^s = 1,$$

d'où, comme par définition $\omega = (\underline{\lambda}\cdot \parallel s \parallel)$

$$Na^s = \frac{1}{\omega}.$$

Pour $l(\underline{s}) = r$, $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_r)$, on a la relation de récurrence

$$(\underline{\lambda}\cdot \parallel \underline{s} \parallel) Na^{\underline{s}} = Na^{s_1\ldots s_{r-1}} I^{s_r},$$

d'où, comme X est non résonnant, et donc $(\underline{\lambda}\cdot \parallel \underline{s} \parallel) = \parallel \underline{\omega} \parallel \neq 0$, on a

$$Na^{\underline{s}} = \frac{1}{\parallel \underline{\omega} \parallel} Na^{s_1\ldots s_{r-1}}.$$

Une simple récurrence donne la formule générale de $Na^\bullet$, à savoir

$$Na^{\underline{s}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\ldots(\omega_1+\ldots+\omega_r)}.$$

Comme $Na^\bullet$ vérifie l'équation (17), on sait que le moule $Na^\bullet$ est symétral (voir [2] pour une démonstration), c'est-à-dire que l'objet Na est un automorphisme formel de $\mathbb{C}[[x]]$. Ceci termine la démonstration de ce théorème. □

Remarque. L'opérateur Na est un objet formel. Son éventuelle convergence est étudiée à la section 3.4.

On peut qualifier le moule $Na^\bullet$ de coefficient "universel", et ceci pour au moins deux raisons :
- Deux champs de vecteurs de même partie linéaire et de même alphabet ont exactement le même moule de linéarisation.
- Tous champs de vecteurs non résonnants se linéarisent par le "même" changement de variable, en ce sens que l'expression formelle du moule Θ est fixe.

Le calcul moulien permet donc d'isoler dans le problème de linéarisation, ce qui est intrinsèque, de ce qui ne l'est pas.

Remarque. Il existe un théorème analogue dans le cas résonnants, c'est le théorème de Poincaré-Dulac (voir par exemple [2, 4]).

3.4 Problèmes de convergence

Un problème important dans la normalisation des champs de vecteurs est celui de la convergence/divergence de l'automorphisme de conjugaison. Nous montrons ici la convergence dans le cas du théorème de Poincaré (théorème 28).

Commençons par définir une norme :

Définition 29 *Soient* U *et* V *deux voisinages compacts de* 0 *dans* $\mathbb{C}^\nu$*, tels que* $V \subset U$*. Pour tout germe de fonction* ϕ *de* $\mathbb{C}^\nu$ *en* 0*, on définit*

$$\| \phi \|_U = \sup_{x \in U} \mid \phi(x) \mid .$$

De même, pour tout opérateur P *de* $\mathbb{C}^\nu$ *dans lui-même, on définit*

$$\| P \|_{U,V} = \sup_{\phi \ \mid \ \|\phi\|_U \leq 1} \| P(\phi) \|_V .$$

On dit que la série d'opérateurs $\sum_{\underline{n}} P_{\underline{n}}$ est *normalement convergente* si la famille $(\| P_{\underline{n}} \|)_{\underline{n}}$ est sommable pour une paire (U, V) au moins.

Vue la forme du moule intervenant dans le problème de linéarisation du théorème de Poincaré, cette convergence ne peut avoir lieu que sous une contrainte sur la vitesse à laquelle les $\underline{\lambda} \cdot \| \underline{n} \|$ peuvent s'approcher de 0 lorsque $\| \underline{n} \|$ augmente. Cette "vitesse" dépend essentiellement de la disposition des valeurs propres du spectre de la partie linéaire du champ. C'est ce qui motive la définition suivante :

Définition 30 *Soit* $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$ *une collection de valeurs propres dans* $\mathbb{C}^\nu$*. On définit :*
- *le domaine de Poincaré* $\mathcal{P}$ *comme l'ensemble des* $\underline{\lambda}$ *dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0.*
- *le domaine de Siegel* $\mathcal{S}$ *comme le complémentaire du précédent.*

Une condition de contrôle très forte du spectre est l'*absence de petits diviseurs.*

Définition 31 *On dit que le champ* X *ne contient pas de petits diviseurs s'il existe une constante* $C > 0$*, telle que*

$$\forall \omega \in \Omega, \ \mid \omega \mid \geq C,$$

où $\Omega = \{\omega \mid \exists n \in A(X), \ \omega = \underline{\lambda} \cdot n\}$*.*

Si le champ ne possède pas de petits diviseurs, il est nécessairement non résonnant, donc formellement linéarisable d'après le théorème de Poincaré (théorème 28). La convergence de la série normalisante est assurée par le théorème suivant :

Théorème 32 *Soit* X *un champ de vecteur ne contenant pas de petits diviseurs, et dont le spectre est dans le domaine de Poincaré. Alors, l'automorphisme de linéarisation du théorème de Poincaré (théorème 28) est analytique, c'est-à-dire qu'il existe un changement de variable analytique qui linéarise le champ au voisinage de 0.*

Preuve. La première étape consiste à se ramener, via un changement de variable analytique (en fait, même algébrique) à une situation où l'alphabet est tel que les ω sont tous de partie réelle positive. C'est finalement uniquement ce fait qui assure la convergence de la normalisation[7].

[7]Nous allons le voir, ceci implique que les combinaisons linéaires des $\omega \in \Omega$, intervenant dans le moule de linéarisation, ne peuvent pas être trop petites.

Comme les valeurs propres λ_i sont dans $\mathcal{P}$, elles sont toutes dans le même demi-plan ouvert

$$P_\theta = \{z \in \mathbb{C}, Re(ze^{i\theta}) > 0\},$$

pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On peut donc, via une rotation, se ramener au cas où toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan $\{Re(z) > 0\}$. Il existe donc une constante $\rho > 0$ telle que pour tout i, $Re(\lambda_i) > \rho$. Une conséquence importante est qu'il n'existe qu'un nombre fini de $\omega \in \Omega$ tels que $Re(\omega) < 0$. En effet, un tel ω s'écrit $\underline{\lambda} \cdot n$ pour un $n \in A(X)$, avec, par exemple, $n_s = -1$ pour un certain $s \in \{1, \dots, \nu\}$, les autres n_i étant positifs. On a alors :

$$0 > Re(\omega) = -Re(\lambda_s) + \sum_{i \neq s} n_i Re(\lambda_i),$$

donc

$$Re(\lambda_s) > \left(\sum_{i \neq s} n_i \right) \rho,$$

et il n'y a qu'un nombre fini de n_i, $i \neq s$ vérifiant cette inégalité.

On peut alors effectuer un changement de variable polynomial (car il n'y a qu'un nombre fini de ω à éliminer) pour obtenir le champ X sous la forme :

$$X = X_{lin} + \sum_{n \in P(X)} B_n,$$

où $P(X)$ est le nouvel alphabet tel que

$$\forall n \in P(X), Re(\underline{\lambda} \cdot n) > 0.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 33 *Pour toute suite $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ de longueur r, on a*

$$\mid Na^{\underline{n}} \mid \leq \frac{1}{r! C_1^r}, \ \mid (Na^{-1})^{\underline{n}} \mid \leq \frac{1}{r! C_1^r}, \ C_1 > 0, \tag{18}$$

$$\parallel B_{\underline{n}} \parallel_{U,V} \leq r! C_2^{N(n)} \parallel B_{n^1} \parallel_{U,V} \dots \parallel B_{n^r} \parallel_{U,V}, \ C_2 > 0, \tag{19}$$

$$\parallel B_n \parallel_{U,V} \leq (C_{U,V})^{|n|}, \ C_{U,V} > 0, \tag{20}$$

$$c(N) \leq (C_3)^N, \ C_3 > 0, \tag{21}$$

où $\mid n \mid = n_1 + \ldots + n_\nu$ et $N(\underline{n}) = \mid n^1 \mid + \ldots + \mid n^r \mid$ est le poids de $\underline{n}$; $c(N)$ est le nombre de mots de poids N.

Preuve. (du lemme) On admettra (19), (20) et (21). Prouvons (18). Considérons donc une suite $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ de longueur r. Par hypothèse, tous les $\omega \in \Omega$ sont de parties réelles strictement positives. Par ailleurs, l'absence de petits diviseurs impose que pour tout ω, $\mid \omega \mid \geq C > 0$. On a donc

$$\forall \omega \in P(X), \ Re(\omega) \geq C.$$

On en déduit pour tout r,

$$\mid \omega_1 + \ldots + \omega_r \mid \geq Re(\omega_1 + \ldots + \omega_r) \geq rC.$$

On a donc

$$| Na^{\underline{n}} | \leq \frac{1}{r!C^r}.$$

De même, $| (Na^{-1})^{\underline{n}} | \leq \frac{1}{r!C^r}$. □

On peut alors démontrer la convergence normale du normalisateur Na. On a, en notant N le poids de $\underline{n}$,

$$\begin{aligned} \| Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \| &\leq \frac{1}{r!C_1^r} r! \| B_{n^1} \|_{U,V} \dots \| B_{n^r} \|_{U,V} C_2^N \\ &\leq \frac{1}{C_1^r} (C_{U,V})^N C_2^N. \end{aligned}$$

Pour un bon choix de (U, V), on peut rendre $C_{U,V}$ aussi petit qu'on veut. On peut donc supposer $C_{U,V} < 1$. Comme on a toujours $r \leq N$ [8], $(C_{U,V})^N \leq (C_{U,V})^r$. Donc

$$\| Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \| \leq \frac{1}{C_1^r} (C_{U,V})^r C_2^N.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \| \sum_{l(\underline{n})=r, N(\underline{n})=N} Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \|_{U,V} &\leq \sum_{l(\underline{n})=r, N(\underline{n})=N} \| Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \|_{U,V} \\ &\leq \frac{c(N)}{C_1^r} (C_{U,V})^r C_2^N \\ &\leq \frac{(C_2C_3)^N (C_{U,V})^r}{C_1^r}. \end{aligned}$$

Si $C_1 > 1$, le dénominateur tend vers $+\infty$ et le numérateur vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$ et la série est normalement convergente. Si $C_1 \leq 1$, comme $r \leq N$, on a

$$\frac{1}{C_1^r} \leq \frac{1}{C_1^N}.$$

Là encore, la série est normalement convergente. Dans tous les cas, on a donc la convergence normale de la série $\sum_{\bullet} Na^{\bullet} B_{\bullet}$ et donc un changement de variable analytique. Ceci termine la preuve du théorème 32. □

L'existence de petits diviseurs conduit à des difficultés analytiques sérieuses (voir [2]). Mentionnons l'existence de la méthode d'arborification/coarborification permettant de démontrer la convergence (lorsque c'est le cas) des séries formelles construites via le calcul moulien. Les séries obtenues par le calcul moulien se prettent mal à l'analyse. Une semi-norme sur les opérateurs de $\mathbb{C}\{x\}$ étant donné, on obtient, en général, de très mauvaises estimations sur la semi-norme de la série. Cet artefact est dû à la majoration directe d'opérateurs de la forme $B_1 \dots B_n$ qui ne sont pas homogènes. Une idée est donc de reécrire la série en faisant apparaître des opérateurs homogènes. Le codage de ce procédé est la méthode d'arborification introduite par J. Ecalle (voir encore [2] pour plus de détails).

Références

[1] Bourbaki N., *Groupes et algèbres de lie, Chapitre 2 et 3*, Hermann, Paris, 1972.

[2] Cresson J., *Calcul moulien*, Prépublication à l'IHES, 2006.

[8] Rappelons que pour tout $n \in A(X)$, $| n |= n_1 + \dots + n_\nu \geq 1$.

[3] Cresson J., *Mould calculs and normalization of vector fields*, Lectures at the University of Pisa, 2006.

[4] Cresson J. and Morin G., *Mould calculs for hamiltonian vector fields*, Lectures at the University of Pisa, 2008.

[5] Lafontaine J., *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, Collection Grenoble Sciences, 1996.

[6] Martinet J., *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes*, Séminaire Bourbaki, N°564, 1980.

[7] Reutenauer C., *Free lie algebras*, London math. Soc. Monographs, 1993.

[8] Serre J-P., *Lie algebras and Lie groups*, W.C. Benjamin Inc, 1965.