Colle 21

Lois à densité usuelles - Équations différentielles

Questions de cours

1. Loi normale : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. Preuve : Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \text{et} \qquad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 1

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E) : \ y' - 3y = t^2 e^{3t}.$$

1. Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée.
2. Soit P une fonction polynômiale.
   (a) Justifier que la fonction $y_0 : t \mapsto P(t)e^{3t}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si on a, pour tout réel t, $P'(t) = t^2$.
   (b) En déduire une solution particulière de (E).
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et déterminer sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2}e^x$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x}$.
4. On pose $Y = |X|$, ce qui signifie donc que Y est la valeur absolue de X. On admet que Y est une variable aléatoire à définie sur le même espace probabilisé que X. On note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Déterminer $G(x)$ pour tout réel $x < 0$.
   (b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $G(x) = F(x) - F(-x)$. En déduire l'expression explicite de $G(x)$ en fonction de x.
   (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance.

Colle 21

Lois à densité usuelles - Équations différentielles

Questions de cours

1. Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. Preuve : Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 3

On considère le système différentiel suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y - z + e^t \\ y' = 3x + z + 2e^t - 1 \\ z' = -3x + y - e^t + 1 \end{array} \right.$$

1. Expliciter les matrices A et $B(t)$ telles que le système s'écrive $X'(t) = AX(t) + B(t)$.
2. On pose :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Calculer PQ et QAP. Que peut-on en déduire ?
3. On pose $Z(t) = P^{-1}X(t)$. Montrer que :
$$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t).$$
4. Résoudre l'équation différentielle $y' - y = e^t$.
On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto cte^t$.
5. Déterminer alors toutes les solutions du système différentiel $Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t)$.
6. En déduire les solutions du système différentiel (S).

Exercice 4

On note f la fonction définie par : $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \in [1, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$

1. Vérifier que f est une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Montrer que X ne possède pas d'espérance.
4. On pose $Z = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de Z et vérifier que Z suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Colle 21

Lois à densité usuelles - Équations différentielles

Questions de cours

1. Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. Preuve : Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

Exercice 5

On considère le système différentiel linéaire suivant : $(S) : \begin{cases} x_1'' = x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 + x_2 \end{cases}$

1. (a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que : $X'' = AX \Leftrightarrow Y'' = DY$.
   (c) Résoudre les équations différentielles $(E_1) : \; y'' = 0$ et $(E_2) : \; y'' = 2y$.
   (d) En déduire les solutions de (S).
2. (a) Déterminer les états d'équilibre de (S).
   (b) Les trajectoires associées au système (S) sont-elles convergentes ? Les points d'équilibres sont-ils stables ?

Exercice 6

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{n-1}{x^n} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on dit que X suit une loi W de paramètre n, notée $W(n)$.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. (a) Montrer que X a une espérance $E(X)$ donnée par $E(X) = \dfrac{n-1}{n-2}$.
   (b) On appelle mode d'une variable à densité le réel x tel que $f(x)$ soit maximal. Déterminer le mode de X.
   (c) Déterminer le réel μ, appelé médiane de X, tel que $F(\mu) = \dfrac{1}{2}$.
4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendante, et suivant toutes deux la loi $W(n)$.

   On considère les variables aléatoires $S = \max(X_1, X_2)$ et $I = \min(X_1, X_2)$ et on admet que S et I sont des variables aléatoires définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de F_S de S.
   (b) En déduire que S est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_S de S.
   (c) En déduire que S a une espérance $E(S) = \dfrac{2(n-1)^2}{(n-2)(2n-3)}$.
5. Écrire la relation liant X_1, X_2, S et I et en déduire la valeur de $E(I)$.
6. (a) Déterminer la fonction de répartition de F_I de I.
   (b) En déduire que I suit aussi une loi du type W et préciser le paramètre de cette loi.
   (c) Retrouver sans calcul l'espérance de I.
