Correction - DM 14 (A)

A faire pour le Lundi 24 Février

Exercice 1 (ECRICOME 2006)

1. On calcule le quotient :

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x)}{1/x^2} &= x^{n+2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + (n+2)\ln(x)\right)\\ &= \exp\left[x^2\left(-\frac{1}{2} + (n+2)\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\right]\end{aligned}$$

Comme $\ln(x) = o(x^2)$ (par croissances comparées), $\left(-\frac{1}{2} + (n+2)\frac{\ln(x)}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} -\frac{1}{2}$.

Par opération sur les limites et par composition avec la fonction exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{1/x^2} = 0$.

Ainsi, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.

2. $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est impropre en $+\infty$ car f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

D'après la question précédente, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ en $+\infty$.

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge également.

3. (a) Soit $A > 0$. On a $\int_0^A f_{n+2}(x)\,dx = \int_0^A x^{n+1} \times x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$.
On réalise une intégration par partie selon le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} + & x^{n+1} & & x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ & & \searrow & \\ - & (n+1)x^n & \longrightarrow & -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{array}$$

Comme $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ sont C^1 sur $[0, A]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A f_{n+2}(x)\,dx &= \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)x^{n+1}\right]_0^A - \int_0^A -(n+1)x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\\ &= -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right)A^{n+1} + 0 + (n+1)\int_0^A f_n(x)dx.\end{aligned}$$

Lorsque $A \to +\infty$, les deux intégrales convergent et valent I_{n+2} et I_n (question 2).
De plus, $A^{n+1}\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ (question 1).
On obtient alors, en passant à la limite dans l'égalité obtenue, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

(b) On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 1$ car c'est l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.
Par parité, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}$ donc $I_0 = \int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(c) On a $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$. On calcule l'intégrale partielle, avec $A \geq 0$:

$$\int_0^A x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^A = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \underset{A \to +\infty}{\to} 1.$$

Donc I_1 converge (on retrouve le résultat de la question 2) et $I_1 = 1$.

(d) On procède alors par récurrence en notant $\mathcal{P}(n)$ la propriété à démontrer.

Ini. Pour $n = 0$, on a :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \cdot 0)!}{2^0 0!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = I_0 \qquad \textbf{et} \qquad 2^0 0! = 1 = I_1.$$

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \textbf{et} \qquad I_{2n+1} = 2^n n!.$$

Alors avec la question 3.(a), on a :

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= I_{2n+2} = (2n+1)\, I_{2n} = (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(2n+2)\, 2^n n!} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{2 \cdot 2^n\,(n+1)\, n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!} \end{aligned}$$

et

$$I_{2(n+1)+1} = I_{2n+3} = (2n+2)\, I_{2n+1} = (2n+2)\, 2^n n! = 2\,(n+1)\, 2^n n! = (n+1)! 2^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$.

4. (a) f est continue sauf peut-être en 0. f est positive sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{+\infty} f_1(x)dx = 0 + I_1 = 1$$

d'après la question 3.(c).
Donc f est une densité de probabilité.

(b) i. X admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$ converge absolument (ce qui est équivalent à montrer la convergence ici). Or :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\, dx = 0$,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^{+\infty} f_2(x)dx = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2!}{2^1 1!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donc X a une espérance et $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

ii. X admet un moment d'ordre 2 si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge absolument (ce qui est équivalent à montrer la convergence ici). Or :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx = 0$,
- $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{0}^{+\infty} f_3(x)dx = I_3 = 2^1 1! = 2.$

Donc X admet un moment d'ordre 2 et $E\left(X^2\right) = 2$.
Donc X admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

5. (a) $Y(\Omega) = X^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc pour tout $x < 0$, $G(x) = 0$.
Soit $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) = P\left(X^2 \leq x\right) = P\left(|X| \leq \sqrt{x}\right) \quad \text{(par croissance de la racine)} \\ &= P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) = P\left(-\sqrt{x} < X \leq \sqrt{x}\right) \quad \text{(car } X \text{ est à densité)} \\ &= F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

(b) On montre que G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf peut-être en 0 :

- Sur $]-\infty, 0[$, $G(x) = 0$ qui est C^1.
- Sur $]0, +\infty[$, $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ qui est C^1 par opération sur les fonctions C^1 (F est C^1 sauf peut-être en 0 car X est à densité et f est continue sauf peut-être en 0).
- En 0 : pour $x < 0$, $G(x) = 0 \underset{x \to 0^-}{\to} 0$, $G(0) = F\left(\sqrt{0}\right) - F\left(-\sqrt{0}\right) = F(0) - F(0) = 0$ et pour $x > 0$, $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \underset{x \to 0^+}{\to} F(0) - F(0) = 0$ (par continuité de F en 0 car X est à densité). Donc G est continue en 0.

Ainsi, G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf peut-être en 0. Donc Y est à densité.

Pour déterminer une densité g de Y, on dérive G là où elle est C^1 et on donne une valeur arbitraire ailleurs :

- Sur $]-\infty, 0[$, $g(x) = G'(x) = 0$.
- En 0, on pose $g(0) = 0$.
- Sur $]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} F'\left(-\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}e^{-x/2} + 0\right] \quad (\text{car } -\sqrt{x} < 0) \\ &= \frac{1}{2} e^{-x/2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) On reconnait que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$. Donc, avec les formule du cours, $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 4$.

Exercice 2 (ECRICOME 2023)

1. (a) La famille $\mathcal{B}$ est constituée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est un espace vectoriel de dimension 4. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -a+d &=& 0 \\ a-b+c &=& 0 \\ b+c &=& 0 \\ a+d &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 0 \\ b+c &=& 0 \\ -b+c+d &=& 0 \\ b-c+d &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 0 \\ b+c &=& 0 \\ 2c+d &=& 0 \\ -2c+d &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 0 \\ b+c &=& 0 \\ 2c+d &=& 0 \\ 2d &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff a = b = c = d = 0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est bien libre et forme une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Il faut commencer par exprimer les images par f des quatre vecteurs de $\mathcal{B}$, qu'on ne manque pas d'exprimer en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$.

- $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_1) = 0$.
- $A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_2) = 0$.
- $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_3) = 2u_3$.
- $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ donc $f(u_4) = 2u_4 + u_3$.

Ceci permet d'écrire

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

(c) En notant P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ (qui est donc bien inversible), la formule de changement de base donne bien

$$A = PTP^{-1},$$

où

$$T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

est bien triangulaire (supérieure) et

$$P = \begin{pmatrix}-1&0&0&1\\1&-1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

2. (a) C'est un calcul.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On constate qu'on a bien

$$\begin{aligned} 4A^2 - 4A &= 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A^3. \end{aligned}$$

(b) Procédons donc par récurrence en construisant les termes de la suite de proche en proche.

Ini. Pour $n = 1$, $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$. En posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, la relation est vraie pour $n = 1$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$. Il suit que

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n \\ &\underset{\text{H.R}}{=} A\left(a_n A^2 + b_n A\right) \\ &= a_n A^3 + b_n A^2 \\ &= a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2 \\ &= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A. \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on a bien

$$A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A,$$

Ccl. Par récurrence, on a donc le résultat demandé.

3. (a) Soit $n \geq 1$. D'après ce qui précède

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

et la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) On associe à la suite son équation caractéristique $q^2 - 4q + 4 = 0$ qui admet une unique solution $q = 2$. D'après le cours, on peut alors affirmer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$a_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$

Pour déterminer λ et μ, on injecte les valeurs des deux premières termes : $a_1 = 0$ et $a_2 = 4a_1 + b_1 = 1$ ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(\lambda+\mu) & = & 0 \\ 4(\lambda+2\mu) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -1/4 \\ \mu & = & 1/4 \end{array}\right.$$

et on peut conclure que, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{4}(-1+n)2^n = (n-1)2^{n-2}.$$

(c) Pour tout $n \geq 2$, on a $b_n = -4a_{n-1}$ et donc

$$b_n = -4(n-1-1)2^{n-1-2} = -(n-2)2^{n-1}.$$

On remarque que cette formule est encore valide pour $n = 1$.

4. En faisant le bilan de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

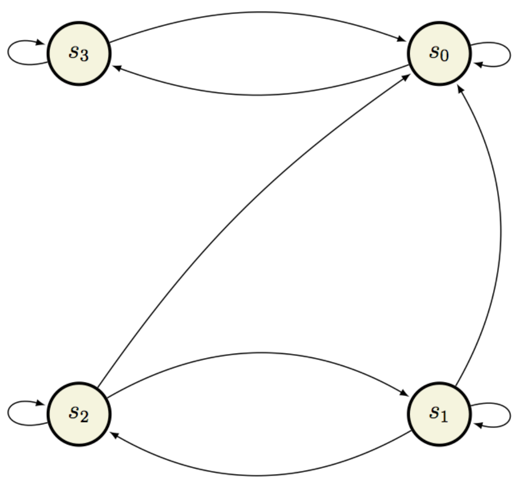
$$\begin{aligned}
A^n &= a_nA^2 + b_nA \\
&= (n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2}\left((n-1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= 2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu !

5. (a) On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice $M = (a_{i,j})$ dont chaque terme $a_{i,j}$ est égal à 1 ou à 0 selon qu'il existe une arrête orientée allant du sommet i vers le sommet j.

(b) Soient n un entier non nul, i un entier de $[\![1,p]\!]$ et j un entier de $[\![1,p]\!]$.
Le coefficient situé à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne de M^n est le nombre de chemins de longueur n du sommet i au sommet j.

6. (a) Le diagramme correspondant est le suivant :



(b) Il n'existe pas de chemin orienté de s_3 vers s_2 : le graphe n'est pas connexe (on dira plutôt qu'il n'est pas *fortement connexe*). On peut aussi aller chercher un résultat du cours :
"*Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G à n sommets, G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients **strictement** positifs.*"
Ce qui n'est pas le cas dans l'exercice car il y a des coefficients nuls quand on calcule $I + A + A^2 + A^3$.

(c) Comme énoncé ci-avant le nombre de chemins de longueur n du sommet s_3 au sommet s_0 est donné par le coefficient à la $4-$ième ligne et première colonne de la matrice A^n. D'après les résultats de la Partie 1, il y en a donc 2^{n-1}.

7. Pour écrire la fonction demandée, il faut parcourir les lignes de la matrice d'adjacence et tester si le coefficient $a_{i,j}$ est nul ou non ce qui indiquera si le sommet s_{i-1} est voisin du sommet s_{j-1}. On propose alors le programme suivant

```python
def matrice_vers_liste(A) :
    p = len(A)
    L = []
    for i in range(p) : # on parcourt la ligne i
        L.append([ ]) # une nouvelle sous-liste
        for j in range(p) : # on parcourt la colonne j
            if A[i][j] ==1 :
                L[i].append(j) # le sommet j est voisin du sommet i
    return L
```

8. On chercher à écrire une fonction en langage Python permettant d'obtenir la longueur du plus court chemin menant d'un sommet de départ s_i à chaque sommet du graphe. On aura reconnu un algorithme très proche de l'algorithme de Dijkstra.

(a) En suivant les étapes de l'algorithme décrit, on obtient la liste `[1, 0, 1, 2]`.

(b) On complète l'algorithme

```python
def parcours(L, i0):
    p = len(L)
    distances = [p]*p # liste de p éléments valant p
    distances[i0] = 0
    a_explorer = [i0]
    marques = [i0]
    while a_explorer != [ ] :
```

```
        s = a_explorer[0] # on prend le premier terme de la liste
        del a_explorer[0] # on l'enlève de la liste
        for v in L[s] : # pour tous les sommets voisins de s
            if v not in marques : # si il n'est pas marqué
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v]=distances[s]+1
    return distances
```

(c) Le programme précédent renvoie la liste des distances mais elle est initialisée à p. Si c'est toujours p après exécution de l'algorithme c'est qu'aucun chemin n'a été trouvé. Sinon la longueur serait inférieure ou égale à $p-1$ vu qu'il y a p sommets. Ainsi, en remplaçant le `return distances` par les commandes suivantes

```
chemins = []
for k in range(p) :
    if distances[k] < p :
        chemins.append(k)
return chemins
```

on obtient bien la liste voulue.

Exercice 3 (ECRICOME 2023)

1. Le premier tirage se fait dans une urne qui contient n boules indiscernables au toucher et chaque numéro est alors équiprobable; on a reconnu la loi uniforme

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).$$

En particulier, les formules du cours donnent directement $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

2. Dans le *pire* des cas, on pioche lors du premier tirage la boule numérotée 1 et il n'y a dans la deuxième urne qu'une boule numérotée 1. Si on pioche au premier coup la boule numérotée n, il y a ensuite des boules numérotées de 1 à n dans la deuxième urne. Ainsi, la valeur de la deuxième boule piochée est toujours une valeur entre 1 et n et toutes les valeurs sont possibles. On a donc $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

(a) On suppose que l'évènement $[X=k]$ est réalisé.
D'après la description de l'expérience, on a disposé dans la deuxième urne un nombre de boules égal à

$$1+2+\ldots+k = \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

(b) Si $j \in [\![1,k]\!]$, il y a dans l'urne des boules numérotées j (et il y en a exactement j). Sinon, les boules j ne font pas partie de l'urne (et la probabilité de les piocher alors nulle). On a donc par équiprobabilité et avec la formule ci-dessus pour le total de boules :

$$P_{[X=k]}(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{2j}{k(k+1)}, & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ 0, & \text{si } k < j \end{cases}$$

4. (a) Commençons par mettre au même dénominateur.

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}=\frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}=\frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$

Par identification des numérateurs, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -1 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

On peut alors écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

(b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Avec le SCE $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
P(Y=j) & = & P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(X=k)\cap(Y=j)\right) \\
& = & \sum_{k=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=j)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\
& = & \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j) \quad \text{(probs composées)} \\
& = & \sum_{k=1}^{j-1} P(X=k)\underbrace{P_{(X=k)}(Y=j)}_{=0}+\sum_{k=j}^{n} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j) \\
& = & \sum_{k=j}^{n} \frac{2j}{k(k+1)}\times\frac{1}{n}=\frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
& = & \frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.
\end{array}$$

5. Y est à support fini, elle admet donc une espérance. De plus,

$$\begin{array}{rcl}
E(Y) & = & \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j)=\sum_{j=1}^{n} j\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \\
& = & \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j)=\frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j-\sum_{j=1}^{n} j^2\right) \\
& = & \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
& = & (n+1)-\frac{2n+1}{3} \\
& = & \frac{n+2}{3}.
\end{array}$$

6. Soit $n \geq 2$. Pour tout couple $(k,j) \in [\![1,n]\!]^2$, tel que $j>k$,

$$P((X=k)\cap(Y=j))=0 \neq P(X=k)\times P(Y=j).$$

Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes. Pour $n=1$, les deux variables aléatoires X et Y sont certaines et égales à 1... elles sont donc indépendantes.

7. (a) Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k]\cap[Y=j]) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k])P_{[X=k]}([Y=j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj\times\frac{1}{n}\times\frac{2j}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right) \\
&= \frac{1}{3n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{18}(2(2n+1)+3) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}.
\end{aligned}$$

(b) Par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}-\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3} \\
&= \frac{n+1}{18}(4n+5-3(n+2)) \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}.
\end{aligned}$$

On remarque que, pour $n=1$, la covariance est nulle, ce qui est cohérent avec ce qu'on a mentionné ci-avant quant à l'indépendance de X et Y.

8. (a) Il suffit d'utiliser l'instruction `append` pour compléter la liste avec deux boucles `for`.

```
def seconde_urne(k):
    L=[ ]
    for j in range(1, k+1) :
        for i in range(j):
            L.append(j)
    return L
```

(b) La variable X se simule grâce à la commande `rd.randint(1, n+1)`. On crée l'urne 2 à l'aide de la valeur de X. On prend ensuite le terme de la liste `urne2` à la position i (où i est choisi aléatoirement uniformément parmi le nombre de boules disponibles) pour Y. Ceci donne

```
import numpy.random as rd

def simul_XY(n) :
    X = rd.randint(1, n+1)
    urne2=seconde_urne(X)
    nb=len(urne2) # nombre de boules dans l'urne 2
    i=rd.randint(0, nb)
    Y=urne2[i]
    return X,Y
```

(c) Le programme proposé est le suivant

```
def fonction(n):
    liste=[0]*n
    for i in range(10000):
        j = simul_XY[1]
        liste[j-1]=liste[j-1]+1/10000
    return liste
```

La variable `liste` contient la liste des fréquences de chaque valeur prise par Y lors de 10000 simulations de celle-ci, c'est-à-dire qu'on *estime* la loi de Y (les fréquences observées donnent des valeurs approchées des valeurs théoriques $P(Y = j)$).

On commence, avec la commande `liste=[0]*n` par créer une liste de n zéros qui va être actualisé. Le $j-$ième terme de la liste (indexé en Python par $j-1$) contient la fréquence de passage par la valeur j.

En effet, la commande `j = simul_XY[1]` simule Y (c'est la deuxième composante du couple (X,Y) car on indexe en commençant par 0...) et les composantes de `liste` sont les fréquences qui augmente de 1 divisé par l'effectif total dès lors que Y a pris la valeur de la composante en question.

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$.

(a) Le point moyen a pour coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent respectivement les moyennes des 20 valeurs obtenues par les simulations de X et de Y. Lorsque n devient grand, la *loi faible des grands nombres* permet d'affirmer que la moyenne empirique d'un $n-$échantillon fournit une bonne estimation de l'espérance. Donc le point moyen devrait avoir des coordonnées

$$\overline{x} \simeq E(X) = \frac{21}{2} = 10,5, \qquad \text{et } \overline{y} \simeq E(Y) = \frac{22}{3} \simeq 7,33.$$

(b) Les valeurs prises par X et Y sont entre 1 et 20: on peut éliminer la figure 1 (le nuage de points ne correspond pas). La covariance de X et Y est positive, la droite de régression est donc croissante. On peut éliminer la 4. La droite de régression passe par le point moyen, donc elle doit passer par $(10,5; 7,33)$. On peut donc éliminer les figures 2 et 4 où c'est la droite de régression qui ne correspond pas.

C'est donc la figure 3 qui correspond au nuage de points étudié.