Correction - DM 14 (B)

A faire pour le Lundi 24 Février

Exercice 1 (EML 2019)

1. A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale.

   Ainsi $Sp(A) = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

   Comme 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible.

2. On cherche les sous-espaces propres de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_{1/2}(A) \iff \left(A - \frac{1}{2}I_3\right)X = 0 \iff \begin{cases} x/2 - y + z = 0\,, \\ 0 = 0\,, \\ 3z/2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y\,, \\ z = 0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi, $E_{1/2}(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ (on obtient une base de $E_{1/2}(A)$ car c'est une famille libre, un vecteur non nul, et génératrice).

$$X \in E_1(A) \iff \left(A - I_3\right)X = 0 \iff \begin{cases} -y + z = 0\,, \\ -y/2 = 0\,, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0\,, \\ z = 0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi, $E_1(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ (on obtient une base de $E_1(A)$ car c'est une famille libre, un vecteur non nul, et génératrice).

$$X \in E_2(A) \iff \left(A - 2I_3\right)X = 0 \iff \begin{cases} -x - y + z = 0\,, \\ -3y/2 = 0\,, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x\,, \\ y = 0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi, $E_2(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ (on obtient une base de $E_2(A)$ car c'est une famille libre, un vecteur non nul, et génératrice).

Par concaténation des bases des sous-espaces propres $E_{1/2}(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ (valeurs propres distinctes), $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme le cardinal de cette famille est égal à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Donc A est donc diagonalisable et on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

La matrice D est diagonale de coefficients diagonaux tous non-nuls, elle est donc inversible et son inverse est la matrice diagonale constituée des inverses des coefficients diagonaux de D :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

3. Le calcul donne $Q^2 = I_3$ et $QDQ = D^{-1}$.

4. Remarquons d'abord que d'après la question précédente, $Q.Q = I_3$, c'est-à-dire que Q est inversible et $Q^{-1} = Q$.

   Par ailleurs $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Or $D^{-1} = QDQ$ d'après la question précédente, donc
   $$A^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}.$$
   Enfin $D = P^{-1}AP$ donc
   $$A^{-1} = PQ(P^{-1}AP)Q^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}.$$
   Ainsi, si l'on note $R = PQP^{-1}$, on a $A^{-1} = RAR^{-1}$, c'est-à-dire que A et A^{-1} sont semblables.

5. On a $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,-1,2)$ donc $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

   M est inversible si et seulement si $(L_2 \leftrightarrow L_3)$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ est inversible, ce qui est le cas puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux tous non-nuls. Ainsi, M est inversible.

6. (a) On a $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.

   (b) On cherche u_3 sous la forme $u_3 = (x,y,z)$.
   $$f(u_3) - u_3 = u_2 \iff (M - I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0\,,\\ -y - z = 1\,,\\ y + z = -1\,.\end{cases}$$
   $$\iff z = -y - 1\,.$$
   Ainsi on peut par exemple choisir $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$ et $u_3 = (0,0,-1)$ convient.

   (c) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = (0,0,0)$. Alors
   $$\begin{cases} a + 0.b + 0.c = 0\,,\\ 0.a + b + 0.c = 0\,,\\ 0.a - b - c = 0\,,\end{cases}$$
   d'où $a = b = c = 0$. Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus elle est constituée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

7. (a) On a montré précédemment que $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$ et on a choisi u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$, c'est-à-dire $f(u_3) = u_2 + u_3$. Ainsi la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Déterminons maintenant M_2 : on a $f(u_1) = u_1$, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité de f et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$, donc $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes, elles sont donc semblables (en effet si on note T la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $M_2 = T^{-1}M_1T$ d'après la formule de changement de base).

   Le calcul donne $M_1M_2 = I_3$.

8. On vient de montrer que $M_1M_2 = I_3$. Donc M_1 est inversible et $M_1^{-1} = M_2$.

   M et M_2 représentent le même endomorphisme f donc M et M_2 sont semblables. Par ailleurs M^{-1} et M_1^{-1} représentent le même endomorphisme f^{-1} donc M^{-1} et M_1^{-1} sont semblables. Autrement dit M^{-1} et M_2 sont semblables puisque $M_1^{-1} = M_2$.

   Finalement on a montré que M et M^{-1} sont toutes deux semblables à la même matrice M_2. Ainsi par transitivité, M et M^{-1} sont semblables.

9. T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls, donc T est inversible.

   Montrons par l'absurde que T n'est pas diagonalisable. Supposons T diagonalisable. T étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc 1 est l'unique valeur propre de T. Ainsi puisque T est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $T = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. Ainsi $T = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, ce qui contredit la définition de T.

   Ainsi, T n'est pas diagonalisable.

10. (a) Le calcul donne $N^3 = 0_3$. Ainsi,

    $$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = I_3.$$

    (b) On vient de montrer que $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3$. Donc $I_3 + N = T$ est inversible et $T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

11. (a) On vérifie par le calcul que $N^2 \neq 0_3$, donc g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$. En revanche $N^3 = 0_3$ donc g^3 est l'endomorphisme nul, en particulier $g^3(u) = 0$.

    (b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

    $$ag^2(u) + bg(u) + cu = 0.$$

    En appliquant g^2 et par linéarité de g^2, on obtient

    $$ag^4(u) + bg^3(u) + cg^2(u) = g^2(0) = 0$$

    Puisque $g^3(u) = g^4(u) = 0$, il reste $cg^2(u) = 0$. Or $g^2(u) \neq 0$ donc $c = 0$. L'équation initiale se récrit donc :

    $$ag^2(u) + bg(u) = 0.$$

    En appliquant g qui est linéaire, on obtient alors :

    $$ag^3(u) + bg^2(u) = 0,$$

    c'est-à-dire $bg^2(u) = 0$ car $g^3(u) = 0$. Or $g^2(u) \neq 0$, donc $b = 0$.

Finalement, il reste $ag^2(u) = 0$, d'où $a = 0$ car $g^2(u) \neq 0$. On a donc montré que $a = b = c = 0$, et la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Comme il s'agit par ailleurs d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On a $g\big(g^2(u)\big) = g^3(u) = 0$, $g\big(g(u)\big) = g^2(u)$, et $g(u) = g(u)$ donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ est : $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Le calcul donne $N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_3$.

Or M_3 et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme g dans des bases différentes. Ainsi, $N^2 - N$ et N sont semblables.

12. D'après la question précédente, il existe une matrice U inversible telle que $N = U^{-1}(N^2 - N)U$. En remarquant que $I_3 = U^{-1}U$, on peut alors écrire

$$T = I_3 + N = U^{-1}U + U^{-1}(N^2 - N)U = U^{-1}(I_3 + N^2 - N)U.$$

Or d'après la question **??**), $T^{-1} = I_3 + N^2 - N$, donc $T = U^{-1}T^{-1}U$. Autrement dit, T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2 (EML 2011)

1. X (qui ne s'intéresse qu'au premier essai) est le nombre de joueurs, parmi n, atteignant la cible au premier essai, indépendamment les uns des autres et avec une même probabilité p. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $E(X) = np$, $V(X) = npq$..

2. Pour chaque joueur, la probabilité de ne pas atteindre la cible (E_i pour échec au i-ième essai) est :

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2) = q^2$$

par indépendance.

Donc la probabilité de l'atteindre au moins une fois est $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = 1 - q^2$.

Comme précédemment, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, 1 - q^2\right)$, $E(Z) = n\left(1 - q^2\right)$ et $V(Z) = nq^2\left(1 - q^2\right)$.

3. Y est donc le nombre de joueur atteignant au moins une fois la cible, mais pas la première fois : c'est le nombre de ceux l'atteignant uniquement la seconde fois.

Pour chaque joueur, la probabilité est $P(E_1 \cap S_2) = P(E_1) P(S_2) = pq$ par indépendance.

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq)$.

4. (a) X et Y ne sont pas indépendantes :
$((X = n) \cap (Y = n))$ est impossible donc $P((X = n) \cap (Y = n)) = 0 \neq P(X = n) P(Y = n)$.

(b) Deux possibilités pour calculer la covariance du couple (X, Y) :

- Si on utilise Koenig-Huygens, $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$ demande de calculer $E(X, Y)$, ce qui semble laborieux.
- Si on utilise la variance d'une somme :

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y),$$

on a :

$$\begin{aligned}
Cov\,(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(V\,(Z) - V\,(Y) - V\,(X)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(nq^2\left(1-q^2\right) - npq\,(1-pq) - npq\right)\\
&= \frac{1}{2}nq\left(q\,(1-q)\,(1+q) - p\,(1-pq) - p\right)\\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q\,(1+q) - 1 + pq - 1\right)\\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q + q^2 - 2 + (1-q)\,q\right)\\
&= -np^2q
\end{aligned}$$

Remarquons que la covariance négative est cohérente : plus X est grand, plus Y risque d'être petit.

5. (a) Voici la fonction demandée :

```python
def simulX(n, p):
    x = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < p:
            x = x+1
    return(x)
```

(b) La fonction `mystere` définie trois vecteurs `x`, `y` et `xy` de 10000 coefficients. A l'aide de la boucle `for`, on remplie ces vecteurs de 10000 simulations de X, de Y et de XY. En faisant la moyenne sur 10000 simulations, on obtient par la loi faible des grands nombres une approximation de $E(XY) - E(X) * E(Y)$, c'est-à-dire par Koenig-Huygens, de $Cov(X,Y)$. Ainsi, cette fonction `mystere` devrait retourner une approximation de $Cov(X,Y)$, c'est-à-dire une valeur proche de $-np^2q$.

6. On a $U\,(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\,(U=n) = q^{n-1}p$, $E\,(U) = \dfrac{1}{p}$ et $V\,(U) = \dfrac{q}{p^2}$.

7. (a) $(U=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc pour tout $t \in [0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
P\,(T>t) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(U=n)\cap(T>t)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}P((U=n)\cap(T>t)) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}P_{(U=n)}\,(T>t)\,P\,(U=n) \quad \text{(probas composées)}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nt}q^{n-1}p = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t}q\right)^n\\
&= \frac{p}{q}e^{-t}q\frac{1}{1-e^{-t}q} \quad \text{(série géom conv car } \left|e^{-t}q\right| < 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \in [0;+\infty[$, $P\,(T>t) = \dfrac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}$.

(b) La fonction de répartition de T est donc donnée pour tout $t \geq 0$ par :

$$F\,(t) = P\,(T \leq t) = 1 - \frac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}$$

Comme F (fonction de répartition) est croissante et positive et que $F(0) = 1 - \dfrac{p}{1-q} = 0$, alors $F(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

(c) F est donc continue

- sur $[0;+\infty[$ car $1 - q\ e^{-t} \neq 0$;
- sur $]-\infty, 0[$ fonction nulle ;
- en 0^- car $F(t) = 0 \to 0 = F(0)$.

Donc la fonction de répartition de T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et T est à densité. Une densité est F' là où F est C^1. Pour $t > 0$:

$$F(t) = 1 - \frac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}$$

et

$$F'(t) = -p\frac{-e^{-t}\left(1-qe^{-t}\right) - qe^{-t}e^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2} = \frac{pe^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2}$$

Ainsi, T est à densité et une densité est

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{pe^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

8. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $z \in [0;+\infty[$,

$$P_{(U=n)}(Z > z) = P_{(U=n)}(UT > z) = P_{(U=n)}(T > z/n) = e^{-nz/n} = e^{-z}.$$

(b) On repasse par les probabilités totales (même raisonnement qu'à la 7.(a)) :

$$P(Z > z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) P_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z}\sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) = e^{-z}$$

car $(U = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un SCE.
On a donc pour tout $z > 0$ (en notant G la fonction de répartition de Z),

$$G(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - e^{-z}.$$

Comme G est continue, $G(0) = \lim_{z\to 0^+} G(z) = 0$.
Comme G est croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, $G(z) = 0$ pour tout $z \leq 0$.
Finalement,

$$G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

où l'on reconnait que Z suit une loi $\mathcal{E}(1)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in [0;+\infty[$, on a avec la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P((U = n) \cap (Z > z)) &= P(U = n) P_{(U=n)}(Z > z) \\ &= P(U = n) e^{-z} \\ &= P(U = n) P(Z > z) \end{aligned}$$

Exercice 3 (EML 2017)

1. (a) La fonction f est deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}.$$

(b) Pour tout $x > 0$, on a $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
On a :

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \underset{0^+}{\to} -\infty,\ f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \underset{+\infty}{\to} +\infty \text{ et } f'(1) = e^1 - e/1 = 0.$$

D'où le tableau de variation de f' :

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

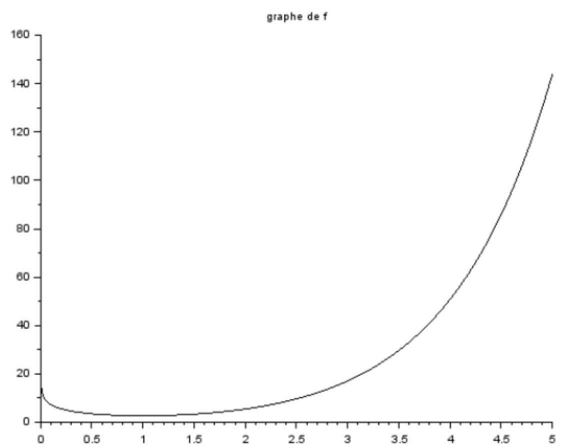
2. On a :

$$f(x) = e^x - e\ln(x) \underset{0^+}{\to} +\infty,\ f(x) = e^x(1 - e\frac{\ln(x)}{e^x}) \underset{+\infty}{\to} +\infty \text{ (par c.c.) et } f(1) = e^1 - e\ln(1) = e.$$

D'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$		e		$+\infty$

3. En $+\infty$, $\ln(x)$ est négligeable devant e^x donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ et f a une "allure exponentielle" en $+\infty$. On obtient la courbe représentative de f :



4. (a) u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x) = (f'(x) - x)' = f''(x) - 1$.
Or, pour tout $x > 0$, $f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2} > e^x > 1$. Donc $u'(x) = f''(x) - 1 > 0$ sur $]0;+\infty[$.
Ainsi, u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

(b) Calculons tout d'abord les limite de u :

$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{e}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{e}{x.e^x} - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty.$$

u est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc u réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (par le théorème de la bijection).

$0 \in \mathbb{R}$ donc 0 admet un unique antécédent $\alpha \in]0;+\infty[$ par u. Autrement dit, l'équation $u(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.

De plus, $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 7,3 - 1,4 - 2 > 0$, donc $u(1) < u(\alpha) < u(2)$ et comme u est strictement croissante, $1 < \alpha < 2$.

5. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "u_n existe et $u_n \geq 2$".

   Ini. $u_0 = 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 2 > 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} = f(u_n) \geq e \geq 2$ d'après la question 2. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

6. (a) g est dérivable sur $[2;+\infty[$ et $g'(x) = (f(x) - x)' = f'(x) - 1$.
   Or f' est croissante sur $[2;+\infty[$, donc si $x \geq 2$:

   $$g'(x) = f'(x) - 1 \geq f'(2) - 1 = e^2 - \frac{e}{2} - 1 \geq 7,3 - \frac{2,8}{2} - 1 = 4,9 > 0.$$

   Ainsi, g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

   (b) g est croissante sur $[2;+\infty[$ et $g(2) = f(2) - 2 \geq e - 2 > 0$ donc, pour tout $x \geq 2$, $g(x) > 0$ et $f(x) > x$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, elle est convergente ou elle tend vers $+\infty$. Démontrons par l'absurde qu'elle n'est pas convergente.

   Comme $u_n \geq 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, si la suite (u_n) admettait une limite finie ℓ, on aurait $\ell \geq 2$ et $f(\ell) = \ell$ (par continuité de f). Comme d'après 6.(a), l'équation $f(\ell) = \ell$ n'a pas de solution dans $[2;+\infty[$, une telle limite ℓ n'est pas possible, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

8. Voici le programme demandé :

```
U = 2
N = 0
while U < A:
    U = np.exp(U)-np.exp(1)*np.log(U)
    N = N+1
print(N)
```

9. (a)
   - Pour $2\ln(x) \leq x$: Posons $h(x) = 2\ln(x) - x$. On a $h'(x) = 2/x - 1 < 0$ sur $[2;+\infty[$. Donc h est décroissante et pour tout $x \geq 2$, $h(x) \leq h(2) = 2\ln(2) - 2 < 2 \times 0,6 - 2 < 0$.
   - Pour $x \leq \frac{e^x}{3}$: Posons $k(x) = x - \frac{e^x}{3}$. On a $k'(x) = 1 - \frac{e^x}{3} < 1 - \frac{2,7}{3} < 0$ sur $[2;+\infty[$.
     Donc k est décroissante et pour tout $x \geq 2$, $k(x) \leq k(2) = 2 - \frac{e^2}{3} < 2 - \frac{7,3}{3} < 0$.

   On a donc démontré que : $\forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.

   (b) $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e \times \ln(u_n)$.
   D'après ce qui précède : $e^{u_n} \geq 3u_n$ et $\ln(u_n) \leq \frac{u_n}{2}$ donc $-e\ln(u_n) \geq -e \times \frac{u_n}{2}$.

On obtient alors, en ajoutant les 2 inégalités :

$$u_{n+1} = e^{u_n} - e \times \ln(u_n) \geq 3u_n - e \times \frac{u_n}{2} = \frac{6-e}{2} u_n.$$

(c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2} u_n > 0$, on a aussi :

$$0 < \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{2}{6-e} \times \frac{1}{u_n}.$$

On pourrait alors démontrer par récurrence (à faire) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \frac{1}{u_n} \leq \left(\frac{2}{6-e}\right)^n \times \frac{1}{u_0}.$$

Or, comme $\dfrac{2}{6-e} \in]-1;1[$, la série de terme général $\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$ est convergente.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est elle aussi convergente.

10. f est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est impropre en $+\infty$.

En $+\infty$, $\ln(x)$ est négligeable devant e^x donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x > 0$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^x dx$ est divergente, car $\displaystyle\int_1^A e^x dx = e^A - e^1 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est elle aussi divergente.

11. $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ est impropre en $+\infty$.

$$\frac{1/f(x)}{1/x^2} = \frac{x^2}{e^x - e\ln(x)} \sim \frac{x^2}{e^x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par c.c.)} \ .$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente (Riemann de paramètre $2 > 1$).

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ est elle aussi convergente.

12. On a :

$$\partial_1 F(x,y) = f'(x) - y \text{ et } \partial_2 F(x,y) = f'(y) - x$$

Donc (x,y) est un point critique de F si, et seulement si,

$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) = 0 \\ \partial_2 F(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - y = 0 \\ f'(y) - x = 0 \end{cases}$$

Par différence de ces deux équations, $f'(x) - y - f'(y) + x = 0$ donc $f'(x) + x = f'(y) + y$.

Or, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $(f'(x) + x)' = f''(x) + 1 > 0$ donc la fonction $x \to f'(x) + x$ est bijective donc injective sur $]1; +\infty[$. L'équation $f'(x) + x = f'(y) + y$ implique donc que $x = y$.

Le système à résoudre équivaut donc à

$$\begin{cases} f'(x) = x \\ y = x \end{cases}$$

dont l'unique solution est le point (α, α), où α est l'unique solution de $f'(x) = x$ définie à la question 4.

13. (a) On a :

$$\partial^2_{1,1}F(x,y) = f''(x)\ ,\ \partial^2_{2,2}F(x,y) = f''(y) \text{ et } \partial^2_{1,2}F(x,y) = \partial^2_{2,1}F(x,y) = -1.$$

La matrice hessienne de F en (α, α) est donc

$$H = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(b) Cherchons les valeurs propres de H.

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(H) &\Leftrightarrow H - \lambda I \text{ est non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow f''(\alpha) - \lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (f''(\alpha) - \lambda - 1)(f''(\alpha) - \lambda + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = f''(\alpha) - 1 \text{ ou } \lambda = f''(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Or nous avons démontré dans la partie I que pour tout $x > 0$, $f''(x) > 1$. Ainsi, H admet deux valeurs propres strictement positives donc F admet un minimum local en (α, α).
