Correction - DM 14 (C)

A faire pour le Lundi 24 Février

Exercice 1 (EDHEC 2004)

1. (a) Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q)(x) &= \left((x^2-x)(\lambda P+Q)(x)\right)'' = \left(\lambda(x^2-x)P(x)+(x^2-x)Q(x)\right)'' \\ &= \lambda\left((x^2-x)P(x)\right)''+\left((x^2-x)Q(x)\right)'' = \lambda f(P)(x)+f(Q)(x). \end{aligned}$$

Donc $f(\lambda P+Q) = \lambda f(P)+f(Q)$ et f est linéaire.
Soit $P \in E$. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = ax^2+bx+c$. Alors :

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= \left((x^2-x)(ax^2+bx+c)\right)'' = \left(ax^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2-cx\right)'' \\ &= 12ax^2+6(b-a)x+2(c-b). \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in E$ et f est bien un endomorphisme de E.

(b)
- Pour e_0 : On reprend le calcul précédent avec $a = b = 0$ et $c = 1$ et on obtient $f(e_0)(x) = 2 = 2e_0(x)$ donc $f(e_0) = 2e_0$.
- Pour e_1 : On reprend le calcul précédent avec $a = c = 0$ et $b = 1$ et on obtient $f(e_1)(x) = 6x-2 = 6e_1(x)-2e_0(x)$ donc $f(e_1) = 6e_1-2e_0$.
- Pour e_2 : On reprend le calcul précédent avec $b = c = 0$ et $a = 1$ et on obtient $f(e_2)(x) = 12x^2-6x = 12e_2(x)-6e_1(x)$ donc $f(e_2) = 12e_2-6e_1$.

(c) $f(e_0)$ a donc pour coordonnées $(2, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$ d'où la première colonne de A et de même pour les autres.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

(d) Comme la matrice A de f est triangulaire à termes diagonaux non nuls, elle est inversible. Donc f est bijective. Comme on a déjà démontré que f est un endomorphisme de E, f est donc un automorphisme de E.

2. (a) Comme la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux. Les valeurs propres de f sont donc 2, 6 et 12. Il reste à chercher les sous-espaces propres associés.

$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2y = 0 \\ 4y-6z = 0 \\ 10z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$(A-6I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4x-2y = 0 \\ -6z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 6 est $E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$(A-12I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -10x-2y = 0 \\ -6y-6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -\frac{1}{5}y \end{cases}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 12 est $E_{12}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

(b) On a obtenu à la question précédente une base de chacun des sous-espaces propres de A (génératrice et libre car un vecteur non nul).

Par concaténation (valeurs propres distinctes), $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Comme card $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}\right) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc A est diagonalisable et avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

on a alors $A = P\,D\,P^{-1}$.

(c) Par récurrence :

Ini. $PD^0P^{-1} = I = A^0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^n A = P\,D^n\,P^{-1}P\,D\,P^{-1} = P\,D^n I\,D\,P^{-1} = P\,D^{n+1}\,P^{-1}$.

Ccl. Pour tout entier naturel n, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

3. (a) Par le pivot de Gauss, on trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Comme D est diagonale, on a donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\times 2^n & 5\times 2^n & 3\times 2^n \\ 0 & -5\times 6^n & -5\times 6^n \\ 0 & 0 & 2\times 12^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\times 2^n & 5\times 2^n - 5\times 6^n & 3\times 2^n - 5\times 6^n + 2\times 12^n \\ 0 & 10\times 6^n & 10\times 6^n - 10\times 12^n \\ 0 & 0 & 10\times 12^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) On pose $B = \frac{1}{12}A$. Donc $B^n = \left(\frac{1}{12}\right)^n A^n$.
Comme $\left(\frac{2}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \to 0$ et $\left(\frac{6}{12}\right)^n \to 0$ alors tous les coefficients de B^n tendront vers 0 sauf ceux en 12^n dans A.

Donc $B^n \to \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = J$ et $J^2 = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} = J$

Exercice 2 (EDHEC 2018)

1. (a) $(X = 1)$ est réalisé lorsqu'on obtient "pile" dès le premier lancer, avec la pièce 0, ou la 1, ou la 2. La formule des probabilités totales, écrite avec le système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) donne donc :

$$P(X=1) = P(P_1) = P_{A_0}(P_1).P(A_0) + P_{A_1}(P_1).P(A_1) + P_{A_2}(P_1).P(A_2).$$

Comme $P_{A_0}(P_1) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1}(P_1) = 0$, $P_{A_2}(P_1) = 1$ et $P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$P(X=1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) La même formule des probabilités totales donne :

$$P(X=n)=P_{A_0}(X=n).P(A_0)+P_{A_1}(X=n).P(A_1)+P_{A_2}(X=n).P(A_2).$$

Pour $n \geq 2$:

- $P_{A_0}(X=n)=P_{A_0}(F_1\cap\ldots\cap F_{n-1}\cap P_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, par indépendance des lancers une fois la pièce choisie.
- $P_{A_1}(X=n)=0$ car la pièce 1 ne donne jamais "pile".
- $P_{A_2}(X=n)=0$ car la pièce 2 donne "pile" dès le premier coup.

On a alors pour $n \geq 2$:

$$P(X=n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.\frac{1}{3}+0.\frac{1}{3}+0.\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

(c) Calculons d'abord :

$$P(X\neq 0)=P(X=1)+\sum_{n=2}^{+\infty}P(X=n)=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

On a ici une série géométrique de raison $\frac{1}{2}\in]-1,1[$ donc convergente. Donc :

$$P(X\neq 0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{(1/2)^2}{1-1/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}.$$

Par conséquent : $P(X=0)=1-P(X\neq 0)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

2. X admet une espérance $E(X)$ si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nP(X=n)$ est (absolument) convergente.

   Or pour tout $n\geq 2$,
   $$nP(X=n)=n\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{6}\times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

   On obtient le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{2}\in]-1,1[$, donc convergente. Donc $E(X)$ existe et on a :

   $$\begin{aligned}E(X) &= 0.P(X=0)+1.P(X=1)+\sum_{n=2}^{+\infty}n.P(X=n)=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2}-1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(4-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

3. D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ possède une espérance si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente. Or pour tout $n\geq 2$,

   $$n(n-1)P(X=n)=n(n-1)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{12}\times n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

   On obtient une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{2}\in]-1,1[$, donc convergente. Donc $E(X(X-1))$ existe et on a :

   $$E(X(X-1))=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)P(X=n)=\frac{1}{12}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{12}\times\frac{2}{(1-1/2)^3}=\frac{4}{3}.$$

On a donc $\dfrac{4}{3} = E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$. Et puisque $E(X)^2 = 1 = E(X)$, on a aussi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X) = \dfrac{4}{3}$.

4. Par symétrie de "pile" et "face" dans la pièce 0 et par symétrie des deux pièces 1 et 2, on pourrait déterminer la loi de Y pour montrer que c'est la même que celle de X.

5. (a) Soit j un entier supérieur ou égal à 2.
Si $(Y = j)$ est réalisé, "face" n'arrive qu'au j-ième lancer, alors on a eu "pile" au premier lancer et donc $(X = 1)$ est réalisé. Donc $(Y = j) \subset (X = 1)$ et $(X = 1) \cap (Y = j) = (Y = j)$.
Par suite : $P((X = 1) \cap (Y = j)) = P(Y = j)$.
(b) Si $i \geq 2$, on a de la même façon $(X = i) \cap (Y = 1) = (X = i)$ (car si "pile" arrive au i-ième coup, le premier lancer est "face"), et donc $P((X = i) \cap (Y = 1)) = P(X = i)$.

6. (a) X et Y étant des variables aléatoires entières positives, $X + Y$ est aussi à valeurs entières positives.
La valeur 0 est impossible pour $X + Y$, car on a $(X + Y = 0) = (X = 0) \cap (Y = 0)$ et c'est impossible car cela signifie qu'on n'a que des "face" et que des "pile".
De même, 2 est une valeur impossible pour $X + Y$, car
$$(X + Y = 2) = ((X = 0) \cap (Y = 2)) \cup ((X = 1) \cap (Y = 1)) \cup ((X = 2) \cap (Y = 0)).$$
Or, on ne peut avoir ni $((X = 0) \cap (Y = 2))$ (que des "face" et le premier "face" au 2-ième coup), ni $((X = 1) \cap (Y = 1))$ ("pile" et "face" au premier coup), ni $((X = 2) \cap (Y = 0))$ (le premier "pile" au 2-ième coup et que des "pile"). Donc $(X + Y = 2)$ est impossible.
(b) On a : $P(X + Y = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) + P((X = 1) \cap (Y = 0))$.
Or $((X = 0) \cap (Y = 1)) = (X = 0)$ (puisque $(X = 0)$ implique $(Y = 1)$).
De même, $((X = 1) \cap (Y = 0)) = (Y = 0)$ (puisque $(Y = 0)$ implique $(X = 1)$).
Donc : $P(X + Y = 1) = P(X = 0) + P(Y = 0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
(c) (P_1, F_1) est un système complet d'événements donc :
$$\begin{aligned}(X + Y = n) &= ((P_1 \cap [X + Y = n]) \cup (F_1 \cap [X + Y = n]) \\ &= ([X = 1] \cap [Y = n - X = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - Y = n - 1]).\end{aligned}$$
On a donc bien, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
$$(X + Y = n) = ((X = 1) \cap (Y = n - 1)) \cup ((Y = 1) \cap (X = n - 1)).$$
(d) Par incompatibilité des événements on a, pour $n \geq 3$:
$$P(X + Y = n) = P((X = 1) \cap (Y = n - 1)) + P((Y = 1) \cap (X = n - 1)).$$
D'après les questions 5.(a) et 5.(b) :
$$P(X + Y = n) = P(Y = n - 1) + P(X = n - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

7. (a) Voici le script `Python` demandé :

```python
piece = rd.randint(0 , 3)
x = 1
if piece == 0 :
    lancer = rd.randint(0, 2)
    while lancer == 0:
```

```python
        lancer = rd.randint(0, 2)
        x = x+1
else:
    if piece == 1 :
        x = 0
print(x)
```

(b) Le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 n'est pas pris en compte car si la variable `piece` ne vaut ni 0, ni 1, c'est qu'elle vaut 2 et alors on a "pile" du premier coup et X reste égal à 1, ce qui est bien la valeur correcte dans ce cas.

Exercice 3 (EDHEC 2016)

1. (a) La fonction $g(t) = e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, elle admet donc une primitive G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. On a alors que :

$$f_n(x) = \int_n^x g(t)dt = [G(t)]_n^x = G(x) - G(n).$$

Donc f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ (par opération sur des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$) et pour tout $x \in [n, +\infty[$,

$$f_n'(x) = G'(x) = g(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

Comme $f_n'(x) > 0$ pour tout $x \in [n, +\infty[$, f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

(b) Comme $n \in \mathbb{N}$, on a pour $\forall t \in [n, +\infty[$, $e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}} \geq 1$ (par croissance de la racine carrée et de l'exponentielle).

Pour tout $x \in [n, +\infty[$, on a en intégrant sur $[n, x]$ (bornes croissante),

$$f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}dt \geq \int_n^x 1dt = x - n.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - n) = +\infty$, on en déduit par passage à la limite dans l'inégalité précédente que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

(c) On a démontré que f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[n, +\infty[$ dans $[f_n(n), \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)[= [0, +\infty[$.

Comme $1 \in [0, +\infty[$, 1 admet un unique antécédent par f_n, noté u_n, et appartenant à $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [n, +\infty[$, donc $u_n \geq n$. Par passage à la limite dans cette inégalité, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(b) Par définition, $f_n(u_n) = \displaystyle\int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}dt = 1$. Alors, par construction :

$$\begin{aligned} n \leq t \leq u_n \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{u_n} \quad \text{(par croissance de la fonction racine carrée)} \\ &\Rightarrow \quad e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}} \quad \text{(par croissance de la fonction exponentielle).} \end{aligned}$$

On intègre entre n et u_n (bornes croissantes car $u_n \geq n$) :

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}}dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}}dt,$$

et, en intégrant de chaque coté les constantes,

$$(u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) = 1 \leq (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}.$$

La première inégalité fournit $(u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leq 1$ donc $(u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}$.
La deuxième s'écrit $1 \leq (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}$ donc $e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n - n)$.
On a finalement :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

3. (a) Puisque 2.(b) donne : $0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}$, on aura $(u_n - n) \leq 10^{-4}$ dès que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$. On va donc partir de $n = 0$, et incrémenter n tant que $e^{-\sqrt{n}} > 10^{-4}$:

```python
n = 0
while np.exp(-np.sqrt(n)) > 10**(-4) :
    n = n+1
print(n)
```

(b) On a (par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$) :

$$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow -\sqrt{n} \leq -4\ln(10) \Leftrightarrow n \geq (4\ln(10))^2 \simeq 16 \times (2,3)^2 \simeq 84,64.$$

Le script précédent va donc afficher pour n la valeur 85.

4. (a) D'après 2.(b), on a pour tout entier naturel n,

$$0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$, on a par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - n) = 0$.

(b) Soit $x \geq 1$. On a par équivalence :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + x \leq (1 + \frac{x}{2})^2 \quad \text{(croissance de } t \to t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{4}.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée. Donc on a bien, pour tout $x \geq 1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toujours par équivalence :

$$\begin{aligned}e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\sqrt{u_n}+\sqrt{n}} \geq \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \quad (\text{car } e^{\sqrt{n}} > 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{u_n} - \sqrt{n} \leq \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \quad \text{(croissance du logarithme)} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{v_n + n} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \quad (\text{car } u_n = v_n + n) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{v_n}{n} + 1} \leq 1 + \frac{v_n}{2.n} \quad (\text{division par } \sqrt{n} > 0)\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{v_n}{n} \geq 0$, la dernière inégalité est vérifiée en vertu du 4.(b) et donc la première aussi !

(d) On divise l'encadrement obtenu en 2.(b) par $e^{-\sqrt{n}} > 0$, ce qui donne :

$$\frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1.$$

En utilisant 4.(c) :

$$\exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leq \frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}) = 1$, qui fournit (par encadrement) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} = 1 \quad \text{donc} \quad u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 4 (EDHEC 2014)

1. (a) Posons $f(t) = \max(x,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $f(t) = \begin{cases} x & \text{si } t < x \\ t & \text{si } t \geq x \end{cases}$.

   On en déduit que f est continue sur $]-\infty; x[$ et sur $]x; +\infty[$. De plus, $x \underset{t\to x^-}{\longrightarrow} x$ et $t \underset{t\to x^+}{\longrightarrow} x$, c'est-à-dire $f(t) \underset{t\to x^-}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(t) \underset{t\to x^+}{\longrightarrow} f(x)$. Ce qui prouve que f est également continue en x.

   La fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) On envisage les 3 cas :

   - Si $x \leq 0$, alors pour tout $t \in [0;1]$, on a $t \geq x$, et donc $\max(x,t) = t$. D'où

   $$y = \int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

   - Si $x \in]0;1]$, on découpe l'intégrale en deux, suivant que $t \leq x$ ou $t > x$:

   $$\begin{aligned} y &= \int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^x \max(x,t)dt + \int_x^1 \max(x,t)dt = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt \\ &= \Big[xt\Big]_0^x + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 = x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2+1}{2}. \end{aligned}$$

   - Si $x > 1$, alors pour tout $t \in [0;1]$, on a $t < x$, et donc $\max(x,t) = x$. D'où

   $$y = \int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^1 x\,dt = \Big[xt\Big]_0^1 = x$$

   Ainsi, $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

2. La variable aléatoire X suit une loi géométrique, donc, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \geq 1$. Il y a donc deux cas :

   - Si $X(\omega) = 1$, alors, d'après la question précédente, $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} = \dfrac{1^2+1}{2} = 1$, et donc $Y(\omega) = X(\omega)$.
   - Si $X(\omega) > 1$, alors, d'après la question précédente, $Y(\omega) = X(\omega)$.

   Donc, dans tous les cas, on a bien $Y(\omega) = X(\omega)$.

   Ainsi, si X suit une loi géométrique, alors $Y = X$.

3. (a) Comme $X(\omega) = \{-1;0;1\}$, on a $P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1) = 1$. Par conséquent :

   $$P(X=0) = 1 - P(X=-1) - P(X=1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

   (b) On envisage les 3 cas. Pour tout $\omega \in \Omega$:

   - Si $X(\omega) = -1$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$.
   - Si $X(\omega) = 0$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$ également.
   - Si $X(\omega) = 1$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} = \dfrac{1^2+1}{2} = 1$.

Donc, dans tous les cas, on a $Y(\omega) = \frac{1}{2}$ ou $Y(\omega) = 1$.

Par conséquent, on a bien $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$.

De plus, d'après les 3 cas ci-dessus :

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Et

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

La loi de Y est donc :

y	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(c) Le programme complété est le suivant :

```python
def SimulY():
    if rd.random() < 1/4:
        y = 1
    else:
        y = 1/2
    return(y)
```

4. (a) La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0; 1[$. Donc, pour tout $\omega \in \Omega$, il y a deux cas :

- Si $X(\omega) = 0$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \frac{1}{2}$, et donc $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.
- Si $X(\omega) \in]0; 1[$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.

Donc, dans tous les cas, on a bien $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.

Ainsi, si X suit une loi uniforme sur $[0; 1[$, alors $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$.

(b) La variable aléatoire X est à valeurs dans $[0; 1[$, donc X^2 est à valeurs dans $[0; 1[$ également. Par conséquent, $X^2 + 1$ est à valeurs dans $[1; 2[$ et donc Y est à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$.

Autrement dit : $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; 1\right[$.

(c) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P\left(\frac{X^2 + 1}{2} \leq x\right) = P\left(X^2 + 1 \leq 2x\right) = P\left(X^2 \leq 2x - 1\right) \\
&= P\left(|X| \leq \sqrt{2x - 1}\right) \quad (\text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissance sur } \mathbb{R}_+) \\
&= P\left(X \leq \sqrt{2x - 1}\right) \quad (\text{car } X \text{ est à valeurs positives}) \\
&= F_X(\sqrt{2x - 1}) \\
&= \sqrt{2x - 1} \quad (\text{car } \sqrt{2x - 1} \in [0, 1[\text{ et } X \text{ suit une loi uniforme sur } [0; 1[)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$, on a $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$.

(d) D'après les deux questions précédentes, la fonction de répartition de Y est la fonction :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x-1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2};1\right[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$ et sur $]1;+\infty[$ (soit comme fonction constante, soit par opérations sur les fonctions continues).
De plus, elle est également continue en $\frac{1}{2}$ (car $F_Y(x) \underset{x\to 1/2^-}{\longrightarrow} F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F_Y(x) \underset{x\to (1/2)^+}{\longrightarrow} F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$) et en 1 (car $F_Y(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} F_Y(1)$ et $F_Y(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} F_Y(1)$).
Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$ et sur $]1;+\infty[$ (soit comme fonction constante, soit par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
Par conséquent, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2};1\right\}$ (qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points).
On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité.

De plus (ce n'est pas demandé dans l'énoncé), avec l'expression de F_Y, on obtient (en dérivant là où elle est dérivable et en donnant des valeurs arbitraires positives ailleurs) une densité de Y (qu'on appellera f_Y) :

$$f_Y : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2};1\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(e) Une méthode pour déterminer $E(Y)$ consisterait à calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)dx$ (avec f_Y la fonction ci-dessus). Mais il y a plus simple. On sait (d'après la question 4.(a)) que $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$ avec X qui suit une loi uniforme sur $[0;1[$ (de densité constante égale à 1 sur $[0;1]$, et nulle ailleurs). Donc, d'après le théorème du transfert, on a, sous réserve d'absolue convergence de l'intégrale :

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{x^2+1}{2} \times 1dx$$

Or, cette intégrale est bien absolument convergente (intégrale d'une fonction continue sur un segment). Donc Y admet une espérance. De plus :

$$E(Y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

(f) D'après la question 4.(a), le programme complété est le suivant :

```python
def SimulY():
    x = rd.random()
    y = (1+x**2)/2
    return(y)
```

5. (a) Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a immédiatement $g\left(]-\infty;0]\right) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et $g\left(]1;+\infty]\right) =]1;+\infty]$. De plus, sur $]0;1]$, la fonction g est continue (fonction polynomiale) et est strictement croissante (g est dérivable sur $]0;1[$, de dérivée $g' : x \mapsto x$, qui est strictement positive sur $]0;1[$). Donc g réalise une bijection de $]0;1]$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} g(x); g(1)\right]$. On en déduit que $g\left(]0;1]\right) = \left]\dfrac{1}{2};1\right]$.
Par conséquent, en "recollant les morceaux" :

$$g(\mathbb{R}) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left]\frac{1}{2};1\right] \cup]1;+\infty] = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Or, $Y = g(X)$. Donc $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$, c'est-à-dire $Y(\Omega) = g(\mathbb{R}) = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

(b) En reprenant les calculs ci-dessus qu'on a l'équivalence : $g(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq 0$.

En effet, si $x \leq 0$, on a bien $g(x) = \dfrac{1}{2}$, et si $x > 0$ (que x soit dans $]0;1]$ ou dans $]1;+\infty]$), on a $g(x) > \dfrac{1}{2}$ et donc $g(x) \neq \dfrac{1}{2}$.
Par conséquent :

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

(c) Étant donné que $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, on a immédiatement $P\left(Y < \dfrac{1}{2}\right) = 0$.
Donc $P(Y \leq x) = 0$ pour tout $x < \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < \dfrac{1}{2}$.
Supposons maintenant que $x \geq \dfrac{1}{2}$. On calcule $F_Y(x)$ en appliquant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$.
On obtient :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\Big((X \leq 0) \cap (Y \leq x)\Big) + P\Big((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\ &\quad + P\Big((X > 1) \cap (Y \leq x)\Big) \end{aligned}$$

On simplifie cela en envisageant deux cas :

- Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $(X \leq 0) \cap (Y \leq x) = (X \leq 0)$ (car $(X \leq 0)$ implique $(Y = \frac{1}{2})$ et donc forcément $(Y \leq x)$) et $(X > 1) \cap (Y \leq x) = \emptyset$ (car $(X > 1)$ implique $(Y > 1)$, ce qui est incompatible avec $(Y \leq x)$). D'où :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(X \leq 0) + P\Big((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\
&= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap \left(\frac{X^2+1}{2} \leq x\right)\right) \quad \text{(question 1.b)} \\
&= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap (X^2 \leq 2x-1)\right) \\
&= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap \left(-\sqrt{2x-1} \leq X \leq \sqrt{2x-1}\right)\right) \\
&= P(X \leq 0) + P\left(0 < X \leq \sqrt{2x-1}\right) \quad \text{car } \sqrt{2x-1} \leq 1 \\
&= P\left(X \leq \sqrt{2x-1}\right)
\end{aligned}$$

Autrement dit, si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $F_Y(x) = \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right)$.

- Si $x > 1$, alors $(X \leq 0) \cap (Y \leq x) = (X \leq 0)$ (de même qu'au cas précédent) et $(0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x) = (0 < X \leq 1)$ (car $(0 < X \leq 1)$ implique $\left(\frac{1}{2} < Y \leq 1\right)$ et donc forcément $(Y \leq x)$). D'où :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(X \leq 0) + P(0 < X \leq 1) + P\Big((X > 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\
&= P(X \leq 1) + P\Big((X > 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\
&= P(X \leq 1) + P\Big((X > 1) \cap (X \leq x)\Big) \quad \text{(question 1.b)} \\
&= P(X \leq 1) + P\Big(1 < X \leq x\Big) \\
&= P(X \leq x)
\end{aligned}$$

Autrement dit, si $x > 1$, alors $F_Y(x) = \Phi(x)$.

Ainsi, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

(d) On constate que $F_Y(x) \underset{x \to (1/2)^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ (car Φ est continue et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$).

Et $F_Y(x) \underset{x \to (1/2)^-}{\longrightarrow} 0$.

Donc F_Y n'est pas continue en $\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que Y n'est pas une variable aléatoire à densité.

Autre méthode : Si Y était à densité, on aurait $P(Y = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui contredit la réponse à la question 5.(b). Donc Y n'est pas une variable à densité.

De plus, si Y était une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition serait une fonction en escaliers et serait constante sur tout intervalle où elle est continue. Or, F_Y est continue sur $]1; +\infty[$ (car Φ l'est), mais n'y est pas constante (elle y est strictement croissante car, pour tout $x > 1$, on a $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, qui est strictement positif).

On en déduit que Y n'est pas non plus une variable aléatoire discrète.