Correction - DM 14 (D)

A faire pour le Lundi 24 Février

ESSEC II 2008

1. Si $x \geq 0$ on a : $|x| - x = x - x = 0 \geq 0$.
   Si $x < 0$, on a : $|x| - x = -2x \geq 0$.
   Ainsi, pour tout x réel, $|x| - x \geq 0$.

2. (a) On a $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Donc

$$\begin{aligned} & (|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 \\ = \ & |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2|v_1||v_2| + 2|v_1||v_3| + 2|v_2||v_3| \\ & - \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 2v_2v_3\right) \end{aligned}$$

   et comme $|x|^2 = \left|x^2\right| = x^2$ et $|xy| = |x||y|$ pour tous réels x et y ,

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 2(|v_1v_2| - v_1v_2) + 2(|v_1v_3| - v_1v_3) + 2(|v_2v_3| - v_2v_3).$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned} (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^{3} v_j\right| = \sum_{j=1}^{3} |v_j| \\ & \Leftrightarrow \quad (|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2(|v_1v_2| - v_1v_2) + 2(|v_1v_3| - v_1v_3) + 2(|v_2v_3| - v_2v_3) = 0 \end{aligned}$$

   Or, avec la question 1, $\left|v_jv_{j'}\right| - v_jv_{j'} \geq 0$.
   Donc, (somme nulle de termes positifs ou nuls) pour tout $j \neq j'$, $\left|v_jv_{j'}\right| - v_jv_{j'} = 0$ et donc $\left|v_jv_{j'}\right| = v_jv_{j'}$.
   Donc, si $\left|v_jv_{j'}\right| > 0$ avec $j \neq j'$, alors $v_jv_{j'} > 0$ et donc v_j et $v_{j'}$ ont même signe.

   (c) Si un des v_j est non nul, tous les autres seront du même signe (d'après la question précédente) ou nul. Donc tous les coefficients de V ont même signe. Donc $V = |V|$ (s'ils sont tous positifs) ou $V = -|V|$ (s'ils sont tous négatifs).

3. On généralise la méthode précédente :

   - On a :
$$\left(\sum_{i=1}^{N} |v_i|\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} v_i\right)^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|v_iv_j| - v_iv_j).$$
   - Avec (E), on a donc
$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|v_iv_j| - v_iv_j) = 0$$
     et donc (avec la question 1), pour tout $i \neq j$, $|v_iv_j| = v_iv_j$ (somme nulle de termes positifs).
   - Pour tout $i \neq j$, $v_iv_j = |v_iv_j| \geq 0$ donc v_i et v_j sont de même signe. Ainsi, tous les coefficients de V sont de même signes et donc $V = |V|$ (s'ils sont tous positifs) ou $V = -|V|$ (s'ils sont tous négatifs).

4. Pour tout i et j, $A(i,j) \geq 0$ et $\frac{(1-\rho)}{N} > 0$ car $\rho \in [0, 1[$ donc $\rho A(i,j) + \frac{(1-\rho)}{N} > 0$
   Donc G est une matrice strictement positive.

5. Soit $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $d_j = 0$, alors $A(i,j) = 0$ si $i \neq j$ et $A(j,j) = 1$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} G(i,j) &= \sum_{i \neq j}^{N} G(i,j) + G(j,j) \\
&= \sum_{i \neq j}^{N} \frac{(1-\rho)}{N} + \rho + \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= \frac{(1-\rho)}{N}(N-1) + \rho + \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= 1 - \rho + \rho \\
&= 1
\end{aligned}$$

6. Soit $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $d_j > 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} G(i,j) &= \sum_{\substack{i \in \{1,...,N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} G(i,j) + \sum_{\substack{i \in \{1,...,N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} G(i,j) \\
&= \sum_{\substack{i \in \{1,...,N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \left(\frac{\rho}{d_j} + \frac{(1-\rho)}{N}\right) + \sum_{\substack{i \in \{1,...,N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= \sum_{\substack{i \in \{1,...,N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \frac{\rho}{d_j} + \sum_{i \in \{1,...,N\}} \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= \frac{\rho}{d_j} d_j + \frac{(1-\rho)}{N} N \quad \text{(car la page } j \text{ pointe vers } d_j \text{ autres pages)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

7. G est donc une matrice stochastique.

8. $\sum_{j=1}^{N} G(i,j)\, p(j)$ est le produit de la $i^{ème}$ ligne de G et de la colonne

$$C = \begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$$

donc la $i^{\text{ème}}$ ligne de ce produit.

Donc si une telle colonne existe, alors $\sum_{j=1}^{N} G(i,j)\, p(j) = p(i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$, signifie que $GC = C$. Donc ce vecteur est invariant par G.

9. On note V_n le vecteur de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont pour tout $i \in \{1, 2, ..., N\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante est définie par $(v_n)_i = P(X_n = i)$.

   On a, pour tout i, $(v_n)_i = P(X_n = i) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{N} P(X_n = i) = 1$ donc $|V_n| = 1$.

   V_n est bien un vecteur de probabilité.

10. Pour tout $(i,j) \in \{1, 2, ..., N\}^2$, on a avec la formule des probas composées :

$$P(X_n = i \cap X_{n-1} = j) = P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = i)\, P(X_{n-1} = j) = G(i,j)\,(v_{n-1})_j$$

11. Comme $(X_{n-1}=j)_{j\in[\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements,

$$P(X_n=i)=\sum_{j=1}^{N} P(X_n=i\cap X_{n-1}=j)=\sum_{j=1}^{N} G(i,j)(v_{n-1})_j$$

On reconnait la $i^{ème}$ ligne du produit de G et de V_{n-1}. Donc $V_n=GV_{n-1}$.

12. Par récurrence (laissée au lecteur).

13. Soit $V=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ alors

$$QV=V\iff\begin{cases}(1-q)x+q'y=x\\ qx+(1-q')y=y\end{cases}\iff\begin{cases}-qx+q'y=0\\ qx-q'y=0\end{cases}\iff x=\frac{q'}{q}y$$

Les invariants de Q sont $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} q'\\ q\end{pmatrix}\right)$.

14. Pour qu'un vecteur invariant $\alpha\begin{pmatrix} q'\\ q\end{pmatrix}$ soit de probabilité, il faut et il suffit que $\alpha q+\alpha q'=1$ et $\alpha\geq 0$. Donc

$$V_\infty=\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q'\\ q\end{pmatrix}$$

est l'unique vecteur de probabilité $V_\infty\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ invariant par Q.

15. Par récurrence :

Pour $n=1$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q'\\ q & q\end{pmatrix}+\frac{(1-q-q')^1}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q'\\ -q & q'\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{q+q'}\left[\begin{pmatrix} q' & q'\\ q & q\end{pmatrix}+(1-q-q')\begin{pmatrix} q & -q'\\ -q & q'\end{pmatrix}\right]\\
=&\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q+q'-qq'-q^2 & (q')^2+qq'\\ q^2+q'q & q+q'-qq'-(q')^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(q+q')Q &= (q+q')\begin{pmatrix} 1-q & q'\\ q & 1-q'\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} q+q'-qq'-q^2 & (q')^2+qq'\\ q^2+q'q & q+q'-qq'-(q')^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$Q=\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q'\\ q & q\end{pmatrix}+\frac{(1-q-q')^1}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q'\\ -q & q'\end{pmatrix}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$Q^n=\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q'\\ q & q\end{pmatrix}+\frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q'\\ -q & q'\end{pmatrix}.$$

alors

$$\begin{aligned}
Q^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} \left[\frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} \right]. \\
&= \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

car les colonnes de $\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$ sont invariantes par Q.

$$\begin{aligned}
Q^{n+1} &= \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} \begin{pmatrix} q(1-q)-qq' & qq'+q'(q'-1) \\ qq'+q(q-1) & -qq'-q'(q'-1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} (1-q-q') \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc la propriété est bien vraie pour tout entier $n \geq 1$.

16. Donc quand n tend vers $+\infty$,

$$Q^n \to \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$$

car $|1-q-q'| < 1$, matrice dont les deux vecteurs colonnes sont égaux à V_∞.

17. On note U le vecteur élément de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent 1.

    Chaque ligne de ${}^tQU$ est la somme des termes des lignes de ${}^tQ$ (donc la somme des colonnes de Q) et vaut donc 1. Donc ${}^tQU = U$.

18. Si $Q - I_N$ est inversible d'inverse R, alors $\left({}^tQ - I_N\right) \cdot \left({}^tR\right) = {}^t\left(R\left(Q - I_N\right)\right) = I$.

    Donc ${}^tR$ est l'inverse de ${}^tQ - I_N$. Ainsi, si $Q - I_N$ est inversible, alors ${}^tQ - I_N$ l'est aussi.

19. Comme ${}^tQU = 1U$ avec $U \neq 0$, alors 1 est valeur propre de ${}^tQ$.

    Donc ${}^tQ - I_N$ n'est pas inversible donc $Q - I_N$ non plus (contraposée de la question précédente) et donc 1 est valeur propre de Q.

20. Si $\lambda = 1$ alors $QV = V$ et dans chaque ligne, $\sum_j Q_{i,j} v_j = v_i$ donc

$$|v_i| = \left| \sum_j Q_{i,j} v_j \right| \leq \sum_j |Q_{i,j} v_j| = \sum_j Q_{i,j} |v_j|$$

donc

$$\sum_j Q_{i,j} |v_j| - |v_i| \geq 0$$

et de même si $\lambda = -1$ car $|-v_i| = |v_i|$.

$Q|V| - |V|$ est positif si V est vecteur propre de Q associé à λ.

21. La somme des composantes de $Q|V|$ est $\sum_i \sum_j Q_{i,j} |v_j|$.

    En inversant les sommes, on a :

$$\sum_i \sum_j Q_{i,j} |v_j| = \sum_j |v_j| \sum_i Q_{i,j} = \sum_j |v_j| = |V|$$

Donc la somme des termes de $Q|V| - |V|$ est nulle.

Chacun de ces termes étant positif ou nul (question 20), ils sont tous nuls et $Q|V| - |V| = 0$.

Ainsi, $|V|$ est invariant par Q.

22. On sait que 1 est valeur propre de Q (question 19). Soit V un vecteur propre associé. D'après la question 21, $|V|$ est invariant par Q. Alors le vecteur
$$W = \frac{1}{\|V\|}|V|$$
sera un vecteur de probabilité (positif et $\|W\| = 1$) invariant par Q. Il existe donc au moins un vecteur de probabilité invariant par Q.

23. Soit V est un vecteur positif invariant par Q.

Supposons que la $i^{ème}$ composantes soit nulle. Alors dans le produit $QV = V$, la $i^{ème}$ ligne est nulle. Et comme elle somme $\sum_j Q(i,j)\,v_j$ de termes positifs ou nuls, tous les termes $Q(i,j)\,v_j$ de la ligne sont nuls.

Comme $Q(i,j) \neq 0$ donc $v_j = 0$ pour tout j.

Si un coefficient est nuls, ils le sont tous.

Ainsi, soit $V = 0_{\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$, soit V est strictement positif.

24. Comme V_∞ est vecteur de probabilité, il n'est pas nul, et c'est un vecteur invariant positif. V_∞ est donc strictement positif (d'après la question précédente).

25. Le sous-espace propre associé à 1 est un sous-espace vectoriel. Comme W_∞ et V_∞ appartiennent à ce sous-espace vectoriel, $W_\infty - \alpha V_\infty$ en est encore élément. Donc V est invariant par Q.

26. La $i_0^{ème}$ composante de V est :
$$(w_\infty)_{i_0} - \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}}(v_\infty)_{i_0} = 0$$
Et pour tout i, on a : $\dfrac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \geq \alpha$ donc la $i^{ème}$ est
$$(w_\infty)_i - \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}}(v_\infty)_i \geq (w_\infty)_i - \frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i}(v_\infty)_i = 0$$
Ainsi, V est positif mais pas strictement positif.

27. Un vecteur invariant positif est soit nul soit strictement positif (question 23). Donc V est nul et donc $W_\infty = \alpha V_\infty$.

28. Comme W_∞ et V_∞ sont des vecteurs de probabilité,
$$1 = \sum_i |(w_\infty)_i| = \sum_i \alpha\,|(v_\infty)_i| = \alpha$$
d'où $\alpha = 1$ et $W_\infty = V_\infty$. Il existe donc un unique vecteur de probabilité invariant.

29. Le système (S) est :
$$\sum_{j=1}^{N} p(j) = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{N} G(i,j)\,p(j) = p(i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N. \tag{S}$$
avec $V = (p(j))_j$ qui est donc un vecteur de probabilité et $\sum_{j=1}^{N} G(i,j)\,p(j)$ qui est la $i^{ème}$ ligne du produit GV.

Donc les solutions du système (S) sont les vecteurs de probabilité invariants.

On en a montré l'existence et l'unicité.

(S) définissant le PageRank admet bien une et une seule solution.

30. On avait $G(i,j) = \rho A(i,j) + \dfrac{(1-\rho)}{N} \geq \dfrac{(1-\rho)}{N}$ et

$$p(i) = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)\,p(j) \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{(1-\rho)}{N} p(j) = \frac{(1-\rho)}{N} \sum_{j=1}^{N} p(j)$$

Comme $(p(j))_j$ est un vecteur de probabilité, la somme des probabilités est 1

Ainsi, $p(i) \geq (1-\rho)/N$ pour tout $i \in \{1, ..., N\}$.

31. Le rôle du paramètre ρ est essentiel pour assurer l'unicité de la solution du système (S).

Pour $\rho = 1$, la probabilité de rester sur une page sans lien serait de 1. On aurait alors $G(i,j) = A(i,j) = I_N$ et on aurait donc une infinité de solution à (S).

32. Pour tout vecteur $V \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, la $i^{ème}$ ligne de QV est $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j$ et

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,|v_j|$$

avec $Q(i,j) \geq 0$.

$$\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} Q(i,j)\,|v_j| = \sum_{j=1}^{N} |v_j| \sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = \sum_{j=1}^{N} |v_j| = \|V\|_1$$

car $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = 1$ (matrice stochastique). Finalement, on a bien $\|QV\|_1 \leq \|V\|_1$.

Si V est positif, $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j\right| = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j$ d'où

$$\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j = \sum_{j=1}^{N} |v_j| \sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = \sum_{j=1}^{N} |v_j| = \|V\|_1$$

$\|QV\|_1 = \|V\|_1$ lorsque V est positif.

33. Soit λ une valeur propre de Q et V un vecteur propre associé.

On a alors $QV = \lambda V$ et $\|QV\|_1 = |\lambda|\,\|V\|_1$ (λ se factorise dans la somme) donc

$$\|QV\|_1 = |\lambda|\,\|V\|_1 \leq \|V\|_1 .$$

Comme $\|V\|_1 > 0$, on obtient en divisant par cette quantité l'inégalité que $|\lambda| \leq 1$.

34. $|V|$ est un vecteur de probabilités invariant par Q. Donc $QV = V$ et pour la première composante :

$$\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,|v_j| = |v_1| .$$

Comme V est associé à λ :

$$\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,v_j = \lambda v_1$$

donc (comme $|\lambda| = 1$)

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\, v_j\right| = |\lambda v_1| = |\lambda|\,|v_1| = |v_1|\,.$$

Finalement, $\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\, v_j\right| = |v_1| = \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,|v_j|$.

35. Les $Q(1,j)$ sont tous strictement positifs. Donc, avec la question précédente,

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\, v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} |Q(1,j)\, v_j|$$

Avec la question 3, tous les $Q(1,j)v_j$ sont de même signe donc (comme les $Q(1,j)$ sont tous strictement positifs) tous les v_j sont de même signe et $V = \pm |V|$.

Le sous espace propre associé à 1 étant un espace vectoriel, V en est également élément. Donc V est associé à a valeur propre 1 et donc $\lambda = 1$.

36. Comme Q est diagonalisable, il existe une matrice S inversible et une matrice D diagonale telles que $Q = SDS^{-1}$.

On peut imposer que la première colonne de S soit V_∞ et donc le premier terme diagonal de D soit 1.

Et par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $Q^n = SD^nS^{-1}$.

37. On a vu que les valeurs propres de Q étaient toutes inférieures ou égales à 1, et que -1 ne l'était pas.

De plus, si V est un vecteur propre associé à 1 alors $\dfrac{1}{\| V \|}V$ sera proportionnel à V_∞ (question 35). Donc V également et le sous espace associé à la valeur propre 1 sera engendré par V_∞.

Ainsi, le sous-espace associé à 1 est de dimension 1.

Donc, parmi les N coefficients diagonaux de D un et un seul (le premier par exemple) est égal à 1 alors que tous les autres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

38. Avec $|x| < 1$, on a $x^n \to 0$. Donc D^n converge donc vers D_∞ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le premier qui vaut 1.

Donc Q^n convergera vers $SD_\infty S^{-1} = Q_\infty$.

39. Le produit de deux matrices à coefficients positifs est une matrice à coefficients positifs.

Si les colonnes de $Q^n = (r_{i,j})$ ont pour somme 1 alors $QQ^n = \left(\sum_{k=1}^{N} q_{i,k} r_{k,j}\right)_{i,j}$ avec la somme des termes de la $j^{ème}$ colonne qui vaut :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} q_{i,k} r_{k,j} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} q_{i,k} r_{k,j} = \sum_{k=1}^{N} r_{k,j} \sum_{i=1}^{N} q_{i,k}$$

et $\sum_{i=1}^{N} q_{i,k} = 1$ somme des termes de la $k^{ième}$ colonne de Q donc

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} q_{i,k} r_{k,j} = \sum_{k=1}^{N} r_{k,j} = 1$$

somme des termes de la $k^{ième}$ colonne de Q^n.

D'où par récurrence, pour tout entier n, Q^n est positive et la somme des termes de chaque colonne vaut 1.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, Q^n est stochastique et, par passage à la limite, Q_∞ est stochastique.

40. On a $QQ^n = Q^{n+1}$ avec Q^n et Q^{n+1} qui tendent vers Q_∞.

    Donc par passage à la limite (la limite d'une somme de N termes), $QQ_\infty = Q_\infty$.

41. En regardant le produit QQ_∞ colonne par colonne, on a donc $QC_j = C_j$ pour chaque colonne de Q. Donc chaque colonne de Q_∞ est invariante par Q.

42. Chaque colonne est invariante par Q et la somme des termes de chaque colonne (positifs) vaut 1. Donc chaque colonne est un vecteur de probabilité invariant : c'est donc V_∞ (par unicité).

    Ainsi, Q_∞ a pour vecteurs colonnes V_∞.

43. Avec $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$, la formule des probabilités totales donne $V_{n+1} = QV_n$ pour tout entier n.

    Donc (par récurrence) $V_n = Q^n V_0$ qui tend vers $Q_\infty V_0 = V_\infty$ (car la somme des coefficients de V_0 vaut 1).

    Donc, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = p(k) = P(X_\infty = k)$.

    Ainsi, $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers X_∞ lorsque n tend vers l'infini.

44. Le page rank est donc la probabilité asymptotique de se retrouver sur une page lorsqu'il surf indéfiniment.