Correction - DM 5

A faire pour le Lundi 4 Novembre

Exercice 1

1. (a) λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_3$ est non inversible. Avec le pivot :

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} (L_1 \leftrightarrow L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda-2 \\ 0 & \lambda & -2+4\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda-2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda-4) \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$$

On obtient une réduite triangulaire qui n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = 0, 1$ ou 4. Donc $Sp(A) = \{0, 1, 4\}$.

On détermine les sous-espaces propres :

- Pour $E_0(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 0 \\ -2z & = & 0 \\ -4z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $E_1(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ -y-z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = -z \end{array} \right.$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $E_4(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ -4y+2z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{array} \right.$$

Donc $E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

(b) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La famille (X_1, X_2, X_3) contient $3 = dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs.

Montrons que X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a - b + c &= 0 \\ a - b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a - b + c &= 0 \\ -2b + 2c &= 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ b + 2c &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a - b + c &= 0 \\ -2b + 2c &= 0 \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2) \\ 6c &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Donc X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants.

Ainsi, (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc A est diagonalisable.

(c) On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inversible (car X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants) et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ diagonale, de sorte que $A = PDP^{-1}$.

(d) Avec la méthode du pivot (calculs laissés au lecteur), on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. (a) On procède directement par équivalence :

$$\begin{aligned} M^2 = A \quad &\Leftrightarrow \quad PNP^{-1}PNP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad P^{-1}PN^2P^{-1}P = P^{-1}PDP^{-1}P \Leftrightarrow N^2 = D. \end{aligned}$$

en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P inversibles à la troisième équivalence.

(b) Si $N^2 = D$, alors

$$ND = NN^2 = N^3 \quad \text{et} \quad DN = N^2N = N^3 \quad \text{donc} \quad ND = DN = N^3.$$

(c) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on résout $DN = ND$ ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 & 0 = b & c = 4c & \text{donc } b = c = 0. \\ d = 0 & e = e & f = 4f & \text{donc } d = f = 0. \\ 4g = 0 & 4h = h & 4i = 4i & \text{donc } g = h = 0. \end{cases}$$

On en déduit que si $N^2 = D$, alors $DN = ND$ donc $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ est diagonale.

(d) Soit

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$N^2 = D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ e^2 = 1 \Leftrightarrow e = \pm 1 \\ i^2 = 4 \Leftrightarrow i = \pm 2 \end{array} \right.$$

On obtient 4 solutions :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que, pour tout $1 \leq i \leq 4$, $N_i^2 = D$.

(e) Avec les questions précédentes,

$$M^2 = A \Leftrightarrow \exists i \in [\![1,4]\!],\ P^{-1}MP = N_i \Leftrightarrow \exists i \in [\![1,4]\!],\ M = PN_iP^{-1}.$$

Il y a donc quatre solutions $M_i = PN_iP^{-1}$ vérifiant $M^2 = A$:

$$M_1 = PN_1P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = PN_2P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = PN_3P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = PN_4P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (ECRICOME 2018)

1. (a) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée).

En $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{1+1/x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est définie, continue et dérivable comme combinaison de fonctions usuelles dérivables et on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ 0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = f(n). \end{aligned}$$

(d) D'après le tableau de variation de f, $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

(e) On propose le programme suivant :

```python
def u(n):
    y=0;
    for k in range(1,n+1):
        y = y+1/k
    return(y-np.log(n))
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

(b) On pose $g(x) = \ln(1+x) - x$. g est définie, continue et dérivable sur $]-1; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$.

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n \in \mathbb{R}_+$, on voit que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ et donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$. La suite (v_n) est donc croissante.

(c) Voici le développement limité demandé (c'est du cours !) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut utiliser ce DL dans l'expression de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme générale $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

(e) Par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n.$$

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \gamma.$$

La suite (v_n) converge donc vers γ.

3. (a) On remarque que $v_n = u_n - \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow u_n = v_n + \dfrac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(v_n + \dfrac{1}{n}\right) = \gamma$.

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \leq \gamma \leq u_n \Rightarrow -v_n \geq -\gamma \geq -u_n \Rightarrow u_n - v_n \geq u_n - \gamma \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq u_n - \gamma \geq 0.$$

Par croissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_+$, on a finalement $|u_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| <$ `eps`, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n <$ `eps`. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/$`eps`, donné par $\lfloor$`1/eps`$\rfloor + 1$.

4. On remarque que $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)} \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Or la série de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme générale a_n est convergente.

5. (a) En décomposant les indices de sommation selon la parité :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} &\Leftrightarrow \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{(2\alpha+\beta)n-\alpha}{n(2n-1)} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta &=& 0 \\ -\alpha &=& 1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& -1 \\ \beta &=& 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} && \text{(d'après 2b.)} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) && \text{(d'après 2a.)} \\
&= 2\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&= 2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

6. (a) On revient à la définition de u_n :

$$\begin{aligned}
u_{2n} - u_n &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln(2).
\end{aligned}$$

Donc $u_{2n} - u_n + \ln(2) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

(b) D'après les questions 5.(c) et 6.(a), on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = 2\left(u_{2n} - u_n + \ln(2)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln(2)$$

car, comme (u_n) converge vers γ, (u_{2n}) converge également vers γ car c'est une sous-suite de (u_n).

On retrouve donc que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et on a de plus que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2\ln(2)$.

Exercice 3 (ECRICOME 2004)

1. Notons A l'évènement "le serveur A est choisi", B l'évènement "le serveur B est choisi", T l'évènement "il y a une erreur de transmission".

L'énoncé indique que $P(A) = \dfrac{7}{10}$, $P(B) = \dfrac{3}{10}$, $P_A(T) = \dfrac{1}{10}$ (le serveur A étant choisi, on a 1 chance sur 10 pour qu'il y ait une erreur de transmission) et $P_B(T) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$.

(a) Soit on a choisi le serveur A, soit on a choisi le serveur B. La famille (A, B) étant un système complet d'évènements, on a : $T = (A \cap T) \cup (B \cap T)$. Alors :

$$\begin{aligned} P(T) &= P((A \cap T) \cup (B \cap T)) = P(A \cap T) + P(B \cap T) \\ &= P(A)P_A(T) + P(B)P_B(T) = \frac{7}{10} . \frac{1}{10} + \frac{3}{10} . \frac{1}{20} = \frac{1}{200}(14+3) = \frac{17}{200}, \end{aligned}$$

en utilisant le fait qu'on a une union d'événements incompatibles à la deuxième égalité et la formule des probabilités totales à la troisième.

(b) Ce qui est réalisé est l'erreur de transmission, ce que l'on souhaite savoir est que le serveur A soit choisi. On nous demande donc de calculer $P_T(A)$. Avec la formule de Bayes et la question précédente, on a :

$$P_T(A) = \frac{P_A(T)P(A)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{10} . \frac{7}{10}}{\frac{17}{200}} = \frac{7}{100} . \frac{200}{17} = \frac{14}{17}.$$

2. (a) L'évènement $(L = k)$ signifie que l'on a utilisé durant les k premiers jours le même serveur, soit toujours le A, soit toujours le B, et le $(k+1)^{ième}$ jour on a utilisé l'autre serveur. Ainsi, on a :

$$(L_1 = k) = (\underbrace{A...A}_{k \text{ fois}})B \cup (\underbrace{B...B}_{k \text{ fois}})A.$$

Les évènements $A...AB$ et $B...BA$ sont incompatibles, donc :

$$P(L_1 = k) = P(A...AB) + P(B..BA).$$

Les choix des serveurs étant supposés indépendants, on a :

$$\begin{aligned} P(L_1 = k) &= P(A)...P(A)P(B) + P(B)..P(B)P(A) \\ &= (P(A))^k P(B) + (P(B))^k P(A) = \left(\frac{7}{10}\right)^k (0.3) + (0.3)^k \left(\frac{7}{10}\right). \end{aligned}$$

(b) On a, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^k \left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right) = \frac{3}{10} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^k + \frac{7}{10} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^k \\ &= \frac{3}{10} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{j+1} + \frac{7}{10} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{j+1} = \frac{21}{100} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^j + \frac{21}{100} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^j \end{aligned}$$

On obtient deux séries géométriques de raisons $\frac{7}{10}$ et $\frac{3}{10} \in]-1, 1[$, donc convergentes. Par somme, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k)$ converge et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = \frac{21}{100} \left(\frac{1}{1 - \frac{7}{10}} + \frac{1}{1 - \frac{3}{10}} \right) = \frac{21}{100} \left(\frac{1}{\frac{3}{10}} + \frac{1}{\frac{7}{10}} \right) = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$$

(c) Montrons que L_1 admet une espérance. La série $\sum\limits_{k \geq 1} kP(L_1 = k)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} kP(L_1 = k) &= \frac{3}{10} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{7}{10}\right)^k + \frac{7}{10} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{3}{10}\right)^k \\ &= \frac{21}{100} \left(\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} + \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} \right) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{3}{10}, \frac{7}{10} \in]-1,1[$, les séries $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$ sont convergentes (séries géométriques dérivées d'ordre 1). Donc, par somme, la série $\sum_{k\geq 1} kP(L_1 = k)$ est convergente. Donc L_1 admet une espérance et elle est donnée par :

$$E(L_1) \quad = \quad \frac{\frac{21}{100}}{(1-(\frac{7}{10}))^2} + \frac{\frac{21}{100}}{(1-(\frac{3}{10}))^2} = \frac{(\frac{21}{100})}{(\frac{3}{10})^2} + \frac{(\frac{21}{100})}{(\frac{7}{10})^2} = \frac{(\frac{7}{10})}{(\frac{3}{10})} + \frac{(\frac{3}{10})}{(\frac{7}{10})} = \frac{7}{3} + \frac{3}{7} = \frac{58}{21}.$$

(d) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(L_1 = i \cap L_2 = j)$ signifie que l'on a choisi soit A durant les i premiers jours puis B durant les j jours suivants et A le $(i+j+1)^{ième}$ jour, soit B durant les i premiers jours puis A durant les j jours suivants et B le $(i+j+1)^{ième}$ jour. On en déduit que :

$$(L_1 = i \cap L_2 = j) = (\underbrace{A...A}_{i \text{ fois}}\underbrace{B...B}_{j \text{ fois}}A) \cup (\underbrace{B...B}_{i \text{ fois}}\underbrace{A...A}_{j \text{ fois}}B).$$

En particulier, on a choisi $(i+1)$ fois le serveur A et j fois le serveur B dans le premier cas et $(i+1)$ fois le serveur B et j fois le serveur B dans le deuxième cas. Les évènements $(A..AB...BA)$ et $(B...BA...AB)$ étant incompatibles et les choix des serveurs indépendants, on obtient, pour tous les entiers i, j non nuls,

$$\begin{aligned} P(L_1 = i \cap L_2 = j) &= P(A..AB...BA) + P(B...BA...AB) \\ &= (P(A))^{i+1}(P(B))^j + (P(B))^{i+1}(P(A))^j \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^{i+1}\left(\frac{3}{10}\right)^j + \left(\frac{3}{10}\right)^{i+1}\left(\frac{7}{10}\right)^j. \end{aligned}$$

(e) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Comme $(L_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (car $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$), on a, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$(L_2 = j) = \bigcup_{i=1}^{+\infty}(L_1 = i \cap L_2 = j),$$

et c'est l'union d'événements incompatibles. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} P(L_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(L_1 = i \cap L_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left((\frac{7}{10})^{i+1}(\frac{3}{10})^j + (\frac{3}{10})^{i+1}(\frac{7}{10})^j\right) \\ &= (\frac{3}{10})^j\sum_{i=1}^{+\infty}(\frac{7}{10})^{i+1} + (\frac{7}{10})^j\sum_{i=1}^{+\infty}(\frac{3}{10})^{i+1} \\ &= (\frac{3}{10})^j\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{7}{10})^{k+2} + (\frac{7}{10})^j\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{10})^{k+2} \\ &= (\frac{3}{10})^j(\frac{7}{10})^2\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{7}{10})^k + (\frac{7}{10})^j(\frac{3}{10})^2\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{10})^k \end{aligned}$$

On obtient deux séries géométriques de raisons $\frac{7}{10}$ et $\frac{3}{10} \in]-1,1[$ donc convergentes. Par somme, $\sum_{i=1}^{+\infty} P(L_1 = i \cap L_2 = j)$ converge et on a :

$$P(L_2 = j) = \frac{(\frac{3}{10})^j(\frac{7}{10})^2}{1-(\frac{7}{10})} + \frac{(\frac{7}{10})^j(\frac{3}{10})^2}{1-(\frac{3}{10})} = (\frac{3}{10})^{j-1}(\frac{7}{10})^2 + (\frac{7}{10})^{j-1}(\frac{3}{10})^2.$$

3. (a) Tout d'abord, $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Puisque les expériences sont deux à deux indépendantes, que $P(A) = \frac{7}{10}$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(T_1 = n) = (\frac{7}{10})(\frac{3}{10})^{n-1}.$$

(b) Les séries $\sum\limits_{n\geq 1} nP(T_1 = n) = (\frac{7}{10}) \sum\limits_{n\geq 1} n(\frac{3}{10})^{n-1}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} n^2 P(T_1 = n) &= (\frac{7}{10})\sum_{n\geq 1} n(n-1)(\frac{3}{10})^{n-1} + (\frac{7}{10})\sum_{n\geq 1} n(\frac{3}{10})^{n-1}\\ &= (\frac{7}{10})(\frac{3}{10})\sum_{n\geq 1} n(n-1)(\frac{3}{10})^{n-2} + (\frac{7}{10})\sum_{n\geq 1} n(\frac{3}{10})^{n-1}\end{aligned}$$

sont convergentes car ce sont des séries géométriques dérivées de raison $(\frac{3}{10}) \in]-1, 1[$ donc T_1 admet une espérance et une variance. Et on a :

$$\begin{aligned}E(T_1) &= (\frac{7}{10})\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{3}{10})^{n-1} = \frac{(\frac{7}{10})}{(1-(\frac{3}{10}))^2} = \frac{(\frac{7}{10})}{(\frac{7}{10})^2} = \frac{1}{(\frac{7}{10})} = \frac{10}{7}\\ E(T_1^2) &= (\frac{7}{10})(\frac{3}{10})\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(\frac{3}{10})^{n-2} + (\frac{7}{10})\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{3}{10})^{n-1}\\ &= (\frac{7}{10})(\frac{3}{10})\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(\frac{3}{10})^{n-2} + (\frac{7}{10})\sum_{n=0}^{+\infty} n(\frac{3}{10})^{n-1}\\ &= \frac{2(\frac{7}{10})(\frac{3}{10})}{(1-(\frac{3}{10}))^3} + \frac{(\frac{7}{10})}{(1-(\frac{3}{10}))^2} = \frac{2(\frac{3}{10})}{(\frac{7}{10})^2} + \frac{1}{(\frac{7}{10})} = \frac{2(\frac{3}{10})+(\frac{7}{10})}{(\frac{7}{10})^2} = \frac{1.3}{0.49} = \frac{130}{49}\\ V(T_1) &= E(T_1^2) - (E(T_1))^2 = \frac{130}{49} - \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{30}{49}\end{aligned}$$

(c) Pour commencer $T_2(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ (il faut au minimum deux tentatives pour obtenir une seconde fois le serveur A).

(d) Si $k \geq 2$, la réalisation de l'évènement $(T_2 = k)$ signifie que durant les $(k-1)$ premiers jours, on a choisi qu'une seule fois le serveur A, ce qui fait $\binom{k-1}{1} = k-1$ possibilités, et qu'on a choisi le serveur A au k-ième jour.
Les événements sont indépendants, on en déduit que :

$$P(T_2 = k) = (k-1)P(A)^2 P(B)^{(k-1)-1} = (k-1)(\frac{7}{10})^2(\frac{3}{10})^{k-2}.$$

Exercice 4 (EDHEC 2012)

1. (a) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$. Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(x) = x$, elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$0 \leq u_n < 1$".

Ini. $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 < 1$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n < 1$. Comme f est strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$,

$$f(0) \leq f(u_n) < f(1) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.

(b) On détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} > 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite est donc croissante et majorée par 1 d'après les deux questions précédentes. Elle converge donc vers une limite ℓ.
Et par passage à la limite dans l'inégalité de la question 1.(a), $0 \leq \ell \leq 1$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a par passage à la limite dans la relation de récurrence,

$$f(\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\ell - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 1.$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{1 - \frac{u_n^2+1}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{2 - (1 + u_n)}{1 - u_n^2} = \frac{1 - u_n}{1 - u_n^2} = \frac{1}{1 + u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) En appliquant le résultat admis avec $a_n = \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Or, par télescopage, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_n} - 1$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - 1 \right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n v_n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} n v_n = 2 \quad \Rightarrow \quad v_n \sim \frac{2}{n}.$$

(c) D'après la question précédente,

$$v_n \sim \frac{2}{n} \quad \Leftrightarrow \quad v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :

$$u_n = 1 - v_n = 1 - \left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. (a) Nous proposons la fonction suivante :

```python
def u(n):
    u = 0
    for i in range(1,n+1):
        u = (u^2 + 1) / 2
    return(u)
```

(b) Rappelons que d'après la question 1, $1 - u_n > 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (1 - u_n) = 0$. Nous proposons la fonction suivante :

```
n = 0
while (1 - u(n)) >= 10^(-3) :
    n = n+1
print(n)
```
