Correction - TD 13

Lois à densité usuelles

Correction de l'exercice 7 (EDHEC 2008)

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$ est impropre en $+\infty$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$).
$$\int_0^M \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^M = 1 - \frac{1}{1+M} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$ converge et est égale à 1.

2. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(-x) = \frac{1}{2(1+|-x|)} = f(x).$$
Ainsi, f est paire.

   (b)
   - f est continue sur $\mathbb{R}$ (la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$).
   - f est positive sur $\mathbb{R}$.
   - Avec la question 1,
$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}$$
   Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
   Comme f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge également et vaut 1.

   f est donc bien une densité de probabilité.

3. (a) $X(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $(1+|X|)(\Omega) = [1,+\infty[$ et donc $Y(\Omega) = [0,+\infty[$.

   (b) Avec la question précédente, $G(x) = 0$ si $x < 0$.
   Soit $x \geq 0$. On a (par croissance de l'exponentielle) :
$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) = P(1+|X| \leq e^x) = P(|X| \leq e^x - 1) = P(-e^x+1 \leq X \leq e^x - 1) \\ &= P(-e^x+1 < X \leq e^x-1) \qquad \text{(car } X \text{ à densité)} \\ &= F(e^x-1) - F(-e^x+1). \end{aligned}$$
   Finalement,
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ F(e^x-1) - F(-e^x+1) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   (c) Montrons que G est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 et en 1.
   - sur $]-\infty,0[$: $G(x) = 0$ qui est $\mathscr{C}^1$;
   - sur $]0,+\infty[$: $G(x) = F(e^x-1) - F(-e^x+1)$ qui est $\mathscr{C}^1$ par opérations sur des fonctions $\mathscr{C}^1$ (car F est $\mathscr{C}^1$ car f est continue sur $\mathbb{R}$) ;
   - en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to0^-} G(x) = \lim_{x\to0^-} 0 = 0$,
   $\displaystyle\lim_{x\to0^+} G(x) = \lim_{x\to0^+} (F(e^x-1) - F(-e^x+1)) = F(0) - F(0) = 0$ (par continuité de F et de l'exponentielle),
   et $G(0) = F(0) - F(0) = 0$. Donc G est continue en 0.

   Ainsi, Y est à densité et on peut déterminer une densité :

- sur $]-\infty,0[$: $g(x)=G'(x)=0$;
- sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x)=e^xF'(e^x-1)+e^xF'(-e^x+1)=e^xf(e^x-1)+e^xf(-e^x+1) \\ &= e^xf(e^x-1)+e^xf(e^x-1)=2e^xf(e^x-1) \qquad \text{(car } f \text{ est paire)} \end{aligned}$$

- en 0 : on pose $g(0)=2e^0f(e^0-1)=1$.

On obtient donc :

$$g(x)=\begin{cases} 2e^xf(e^x-1) & \text{si } x\geq 0, \\ 0 & \text{si } x<0. \end{cases}$$

(d) Pour tout $x\geq 0$, $e^x-1\geq 0$ donc $|e^x-1|=e^x-1$ et

$$f(e^x-1)=\frac{1}{2(1+e^x-1)^2}=\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

On obtient donc :

$$g(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\geq 0, \\ 0 & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Finalement, $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$.