Correction du TD 5

Variables aléatoires discrètes

Correction de l'exercice 24

1. (a) $(X_2 = 0) = R_1 \cap R_2$, $(X_2 = 1) = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)$, $(X_2 = 2) = B_1 \cap B_2$.

   (b) $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   Avec la formules des probabilités composées, on a :
$$P(X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$
   Par incompatibilité puis avec la formules des probabilités composées, on a :
$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P((R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$
   Avec la formules des probabilités composées, on a :
$$P(X_2 = 2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$
   On remarque que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 2]\!])$. Donc X_2 admet une espérance et une variance et on a :
$$E(X_2) = \frac{0+2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad V(X_2) = \frac{(2-0)(2-0+2)}{12} = \frac{2}{3}.$$

2. (a) Avec la formules des probabilités composées, on a :
$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ P(X_3 = 3) &= P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   (b) Avec le SCE $(X_2 = i)_{0 \leq i \leq 2}$, on a :
$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= P\left(\bigcup_{i=0}^{2} (X_2 = i) \cap (X_3 = 1)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{2} P((X_2 = i) \cap (X_3 = 1)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \sum_{j=0}^{2} P(X_2 = j)P_{(X_2 = j)}(X_3 = k) \quad \text{(probabilités composées).} \end{aligned}$$
   <u>Calcul de $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1)$</u>
   On constate que l'on a obtenu aucune boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de 3 boules rouges et de 1 boule blanche à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule blanche au troisième tirage donc $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1) = \frac{1}{4}$.
   <u>Calcul de $P_{(X_2=1)}(X_3 = 1)$</u>
   On constate que l'on a obtenu une boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de 2 boules rouges et de 2 boules blanches à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule rouge au troisième tirage donc $P_{(X_2=1)}(X_3 = 1) = \frac{2}{4}$.

Calcul de $P_{(X_2=2)}(X_3 = 1)$

On constate que l'on a obtenu deux boules blanches durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages, ce qui est impossible donc $P_{(X_2=2)}(X_3 = 1) = 0$.

Ainsi, on a : $P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{3} \times 0 = \dfrac{3}{3 \times 4} = \dfrac{1}{4}$

(c) Comme $(X_3 = i)_{0\leq i\leq 3}$ est un SCE, on a :

$$P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = \frac{1}{4}.$$

On a ainsi démontré que $X_3 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 3]\!])$.

3. (a) $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(X_n = 0) & = & P(R_1 \cap \ldots \cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) \ldots P_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}}(R_n) \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \ldots \times \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}. \end{array}$$

(b) En considérant le système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0\leq i\leq n-1}$:

$$(X_n = k) = \bigcup_{i=0}^{n-1} ((X_{n-1} = i) \cap (X_n = k))$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} P(X_n = k) & = & P\left(\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} ((X_{n-1} = i) \cap (X_n = k))\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} P((X_{n-1} = i) \cap (X_n = k)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} P(X_{n-1} = i)P_{(X_{n-1}=i)}(X_n = i) \quad \text{(probas composées)} \end{array}$$

Or, si l'on veut obtenir k boules blanches durant les n tirages, il est indispensable d'avoir obtenu k boules blanches durant les $(n - 1)$ premiers tirages (donc le n-ième tirage donne une boule rouge) ou l'on a obtenu $k - 1$ boules blanches durant les $(n - 1)$ premiers tirages (donc le n-ième tirage fournit une boule blanche). Donc les probabilités conditionnelles $P_{(X_{n-1}=i)}(X_n = i)$ sont nulles sauf si $i = k - 1$ ou si $i = k$.

On en déduit que

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k - 1)P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$$

(c) Calcul de $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$

On a obtenu $k-1$ boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages et on souhaite obtenir k boules blanches dans les n premiers tirages. Nous disposons donc de $(k - 1) + 1 = k$ boules blanches et de $(n + 1) - k = n - k + 1$ boules rouges à l'issue de la $(n - 1)$-ième pioche (qui compte $2 + (n - 1) = n + 1$ boules) et on obtient une boule blanche au n-ième tirage donc $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) = \dfrac{k}{n+1}$.

Calcul de $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$

On a obtenu k boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages et on souhaite obtenir k boules blanches dans les n premiers tirages. Nous disposons donc de $k+1$ boules blanches et de $(n+1)-(k+1) = n-k$ boules rouges à l'issue de la $(n-1)$-ième pioche (qui compte $2+(n-1) = n+1$ boules) et on obtient une boule rouge au n-ième tirage donc $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k) = \dfrac{n-k}{n+1}$.

(d) Posons $\mathcal{P}(n)$: "$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$".

Ini. $(\mathcal{P}_2)$ est vraie car $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2+1}$.

Héré. Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a avec les questions 3.(b) et 3.(c) et en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_n = k-1)P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k)P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1-k}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

La formule est donc pour tout $1 \leq k \leq n$. Pour $k = n+1$, on a (en utilisant la question 3.(a)) :

$$P(X_{n+1} = n+1) = 1 - \sum_{k=0}^{n} P(X_{n+1} = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit $n \geq 2$.

(e) On remarque que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$. Donc X_n admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X_n) = \frac{0+n}{2} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad V(X_n) = \frac{(n-0)(n-0+2)}{12} = \frac{n(n+2)}{12}.$$