DM 14 (B)

A faire pour le Lundi 24 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque

il existe une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle inversible ?
2. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

   Expliciter la matrice D^{-1}.
3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6. (a) Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.
   (b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.
   (b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer M_1M_2.
8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10. (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
    (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
    (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
    (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
    (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
    (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2

Les deux parties sont indépendantes. Soit $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. A chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.

3. On note $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y.

4. (a) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer la covariance du couple (X, Y).

5. On suppose dans cette question avoir importé sur `Python` les bibliothèques `numpy` (avec le raccourci `np`) et `numpy.random` (avec le raccourci `rd`).
   (a) Proposer un programme `Python` d'en-tête `simulX(n, p)` qui retourne une simulation de la variable aléatoire X en utilisant uniquement la commande `rd.random()`.
   (b) On admet avoir correctement programmé deux fonctions `simulX(n, p)` et `simulY(n, p)` qui retournent respectivement une simulation de la variable aléatoire X et une simulation de la variable aléatoire Y.

   On considère le programme suivant :

```python
def mystere(n, p):
    x = np.zeros(10000)
    y = np.zeros(10000)
    xy = np.zeros(10000)
    for k in range(10000)
        x[k] = simulX(n, p)
        y[k] = simulY(n, p)
        xy[k] = x[k]*y[k]
    return(np.mean(xy) - np.mean(x)*np.mean(y))
```

   Que fait cette fonction ? Quel résultat retourne-t-elle ?

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète.
Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.

7. On considère une variable aléatoire T telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; +\infty[\,, \quad P_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}.$$

   (a) Montrer : $\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad P(T > t) = \dfrac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

   (c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

8. On note $Z = UT$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in [0, +\infty[\,, \quad P_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z}$.

   (b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in [0, +\infty[\,, \quad P((U = n) \cap (Z > z)) = P(U = n)\, P(Z > z)$.

Exercice 3

On considère la fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Étude de la fonction f.

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'x)$ et $f''(x)$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer la courbe représentative de f.

4. (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.

   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer que : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série.
On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

6. (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Écrire un programme en `Python` qui, étant donné un réel A, renvoie $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$.
9. (a) Démontrer : $\forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leq x \leq \dfrac{e^x}{3}$

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2}u_n$.

   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées.

10. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle ?
11. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question 9.(a).

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie pour tout (x,y) de $]1;+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy$$

12. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question 4 de la partie I.
13. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).

    (b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α)? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local?
