DM 14 (C)

A faire pour le Lundi 24 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $\left(x^2 - x\right) P(x)$.

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.
   (c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.
   (d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.
2. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
   (b) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des 1 telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
3. (a) Déterminer la matrice P^{-1}.
   (b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.
   (c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
   On pose $B = \frac{1}{12}A$. Montrer que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : "on choisit la pièce numérotée i".
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : "on obtient "pile" au lancer numéro k" et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ P(X = n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.

   En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \dfrac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P((X=1)\cap(Y=j)) = P(Y=j)$.

   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P((X=i)\cap(Y=1)) = P(X=i)$.

6. Loi de $X+Y$.

   (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

   (b) Montrer que $P(X+Y=1) = \dfrac{2}{3}$.

   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

   $$(X+Y=n) = ((X=1)\cap(Y=n-1)) \cup ((Y=1)\cap(X=n-1)).$$

   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

   $$P(X+Y=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

7. On rappelle que sur `Python` l'instruction `rd.randint(0, m+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .

   (a) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = rd.randint( ..... , ..... )
x = 1
if piece == 0 :
    lancer = rd.randint( ..... , ..... )
    while lancer == 0:
        lancer = .....
        x = .....
else:
    if piece == 1 :
        x = .....
print(x)
```

   (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n,+\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}dt.$$

1. Étude de f_n.

   (a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n,+\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n,+\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

(b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

(c) En déduire que, pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite (u_n).

(a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

3. (a) Utiliser la question 2.(b) pour compléter les commandes `Python` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while ..... :
    n = .....
print(n)
```

(b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

(a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

(b) Établir que : $\forall x \geq 1, \quad \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.

(c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

(d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.(b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 4

1. Soit x un réel quelconque.

(a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \displaystyle\int_0^1 \max(x, t)dt$.

(b) Montrer que $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Dans la suite du problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, en posant $Y = \displaystyle\int_0^1 \max(X, t)dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)dt.$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

2. Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.
3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

   (a) Déterminer la valeur de $P(X = 0)$.

   (b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y.

   (c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
def SimulY():
    if ..... :
        y = .....
    else:
        y = .....
    return(y)
```

4. On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0; 1[$, avec $X(\Omega) = [0; 1[$.

   (a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2 + 1}{2}$.

   (b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

   (c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$.

   (d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

   (e) Donner la valeur de $E(Y)$.

   (f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
def SimulY():
    x = .....
    y = .....
    return(y)
```

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

   (a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

   (b) Donner la valeur de $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$.

   (c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements

$$([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$$

   pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ \Phi(\sqrt{2x - 1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   (d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?