DM 14 (E)

A faire pour le Lundi 24 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.
Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis.
On dit qu'une densité vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :
• continue sur I ;
• strictement positive sur I ;
• nulle en dehors de I.
On écrira alors simplement : f est CSP(I).
On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires à densité.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :
• X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I, de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I)
• U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X.
• h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.
On se propose d'établir la formule suivante :

$$P(U \leq h(X)) = P(U < h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)dt$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\Psi(x) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)])$

1. Pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, on pose $M(x, y) = \max_{t\in[x,y]} h(t)$ et $m(x, y) = \min_{t\in[x,y]} h(t)$.

   (a) Soit x dans I. Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\alpha_y)$.

   (b) En déduire : $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} M(x, y) = h(x)$.

   (c) Montrer de même que, pour tout y dans I, $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} M(x, y) = h(y)$.

   On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} m(x, y) = h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} m(x, y) = h(y).$$

2. Soit x et y deux réels de I tels que $x < y$.

   (a) Établir l'inclusion suivante entre évènements :

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)] \subset [x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]$$

   En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \leq (F(y) - F(x))M(x, y)$$

   (b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y)$$

(c) Montrer que Ψ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

3. (a) En déduire que, pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t)h(t)dt$$

(b) Établir : pour tout x dans I, $\Psi(x) \leq F(x)$, puis montrer : $\lim_{x \to a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad \Psi(x) = \int_a^x f(t)h(t)dt.$$

(c) Établir : pour tout x dans I, $P([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = P([U \leq h(X)]) - \Psi(x)$.
En déduire : $\lim_{x \to b} \Psi(x) = P([U \leq h(X)])$ puis

$$P([U \leq h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)dt.$$

4. Montrer que $P([U < h(X)]) = 1 - P([1 - U \leq 1 - h(X)])$, et en déduire :

$$P(U < h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)dt.$$

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.
On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1, S_2 et S_3. On suppose que :
• pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.
• pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.
• pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.
On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1, x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1, S_2 et S_3, strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, tels que :

$$\begin{cases} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

(b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

6. (a) Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous espace vectoriel associé.
(b) En déduire que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable.

On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $]-1, 1[$.

7. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha + \beta < 1$.
(b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha+\beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

8. On suppose, dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$, admettant une densité de probabilité f qui est CSP($]0,1[$).

   En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1 - E(\beta)$.

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i, et $y_i + z_i$, le prix de vente d'une unité de bien du secteur i. La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i.

   On définit les deux matrices lignes : $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice carrée $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Établir la relation matricielle (1) : $Y = Y\ A + Z\ B$.

   (b) Justifier sans calculs l'inversibilité de $I_3 - A$.
   En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En Scilab par exemple, on dispose de l'instruction `rand()`. Ces générateurs produisent une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.
On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ces générateurs aléatoires.
Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

3a - Simulation par la méthode d'inversion

10. (a) On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$.
    On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de H^{-1}.

    Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$
    On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X.

    (b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x) = G(x)$.

    (c) En déduire que X suit la même loi que Z.

11. Simulation de lois exponentielles.
    On suppose dans cette question que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

    (a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

    (b) Écrire une fonction en `Python` d'en-tête `def expo(lambda):` qui simule la loi exponentielle.

12. Simulation de la loi de Laplace.
    On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \qquad \text{(densité de Laplace).}$$

    Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
    Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie $P([V = -1]) = P([V = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
    On pose $X = VY$.

(a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

(b) Établir :

- pour tout $x \geq 0$, $P([X > x]) = \dfrac{1}{2}P([Y > x])$;
- pour tout $x \leq 0$, $P([X \leq x]) = \dfrac{1}{2}P([Y \geq -x])$;

(c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

(d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

(e) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace :

```
def laplace():
    y = expo(1)
    v = rd.random()
    if ..... :
        return(y)
    else:
        return( ..... )
```

3b - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la partie 3), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que $\quad \forall x \in I, g(x) \leq cf(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $x \in I$, $g(x) = cf(x)h(x)$.

On considère alors :

- une suite de variable aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, 1[$.
- une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeur dans $]a, b[$ ayant toutes la même loi de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.
  On suppose de plus que pour tout entier $n \geq 1$, les variables $X_1, \ldots, X_n$, $U_1, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.

On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leq h(X_k)$.

14. En utilisant la partie 1, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $P([U_k \leq h(X_k)]) = \dfrac{1}{c}$.
    En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est à dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leq h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Exprimer l'événement $[X \leq x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

    (b) En utilisant la question 3.(b), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
    $$P([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) = \frac{1}{c}G(x).$$

    (c) En déduire $P([X_n \leq x] \cap [N = n])$ en fonction de c et de $G(x)$.

(d) Montrer finalement : $P([X \leq x]) = G(x)$.

16. Conclure.

17. Simulation de la loi normale.

Dans cette question, Z suit la loi normale centrée réduite, donc $I = \mathbb{R}$.

Soit f la densité de Laplace (question 12), définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

(a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

(b) Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $a : x \mapsto e^{x-x^2/2}$.

(c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geq 0$: $g(x) \leq \dfrac{c}{2}e^{-x}$.

(d) En déduire que pour tout x réel, $g(x) \leq cf(x)$.

(e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée réduite. On explicitera la fonction h introduite à la question 13.

(f) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

```python
def normale():
    x = laplace()
    u = rd.random()
    while ..... :
        x = laplace()
        u = rd.random()
    return( ..... )
```