DM 18

A rendre le Vendredi 28 Mars

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]0;+\infty[$, calculer, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \ \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$.
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.

   En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) \geq e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geq ex$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de φ.
6. Montrer que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.

   Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

   On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

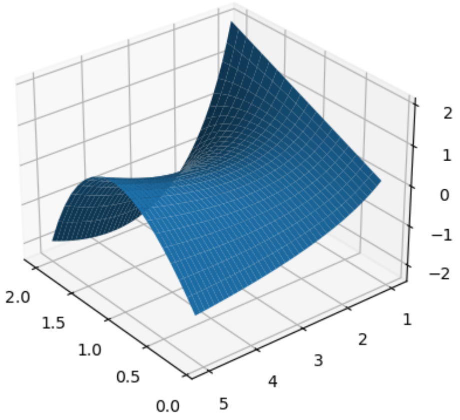
On note $U = \mathbb{R}\times]0;+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy - e^x \ln y$.

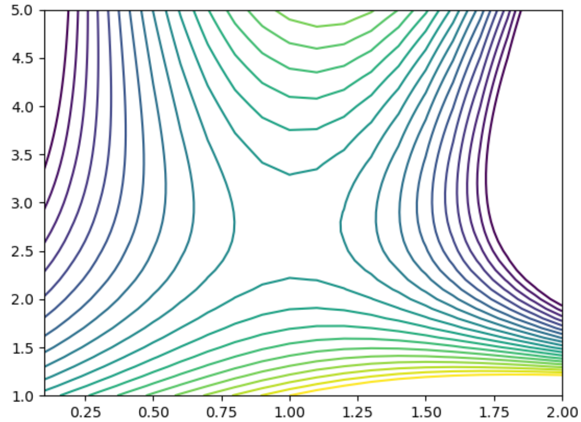
8. On exécute les programmes suivants :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl.toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x, y):
    return x*y-np.exp(x)*np.log(y)

x = np.arange(0.1, 2.1, 0.1)
y = np.arange(1, 5.1, 0.1)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, f(X, Y))

plt.show()
```

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl.toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x, y):
    return x*y-np.exp(x)*np.log(y)

x = np.arange(0.1, 2.1, 0.1)
y = np.arange(1, 5.1, 0.1)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

L = np.linspace(-1, 1, 20)
plt.contour(X, Y, f(X, Y), L)

plt.show()
```

On obtient les graphiques :





Au vu de ces résultats, f semble-t-elle avoir un point critique sur l'ensemble $[0,1;2] \times [1;5]$? Si oui, donner une valeur approchée des (x_0, y_0) en lequel il est atteint.

Ce point critique semble-t-il être un extremum local ?

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.

10. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x, y).

11. Établir que, pour tout $(x, y) \in U$, (x, y) est un point critique de f si et seulement si :
$$x > 0 \text{ et } y = e^{\frac{1}{x}} \text{ et } \varphi(x) = 0.$$

12. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, e)$.

13. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, e)$?

14. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$. On pourra utiliser les résultats de la partie I.

16. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

17. Écrire un programme en `Python` qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.

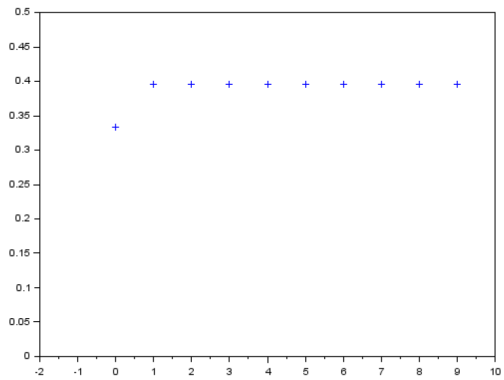
18. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

19. Compléter le programme `Python` suivant qui enregistre les 10 premiers termes de la suite u dans un vecteur ligne `U` puis enregistre les 10 premiers termes de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ dans un vecteur ligne `S` et trace leur représentation graphique.

```
def phi(x):
    return np.exp(x)-x*np.exp(1/x)

U = np.zeros(10)
U[0] = 3
```

```python
for k in range(9):
    U[k+1] = .....

S = np.cumsum( ..... )
n = np.arange(0, 10)
plt.plot(n, S, '+')
plt.show()
```

Après exécution on obtient le graphique suivant :



Commenter.

Exercice 2

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
   (b) Déterminer une base (a) de $Ker(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $Im(f)$.
   (c) Montrer que $Im(f^2) = Ker(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.
En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :
$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0$$
On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $Im(g^2) = Ker(g)$.

2. (a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M.
   (b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de M.
   (c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que M n'est pas diagonalisable.

3. (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
   (b) Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
   (c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Déterminer $Im(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $Ker(g)$.
   Pour finir, déterminer $Im(g^2)$ puis conclure.

Exercice 3

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$.

1. (a) Montrer que f est paire.

   (b) Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et donner sa valeur.

   (c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$.

   (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.

3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et donner sa valeur.

   (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$, et donner sa valeur.

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

   (a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .

   (b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

   (c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $V(X)$.

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$.

   (a) On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire.
   Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

   (b) En déduire une fonction `Python` qui simule la loi de $|X|$.

   (c) Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
   En déduire une fonction `Python`, utilisant qui simule la loi de X .

   On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.

   On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon $(Y_1; \ldots; Y_n)$ de la loi de Y. Les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ sont supposées définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ et on rappelle qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

6. On considère des réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0; +\infty[$ par $\forall \lambda \in]0; +\infty[,\ L(\lambda) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$.

   (a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln(L(\lambda))$ en fonction de λ, $x_1, \ldots, x_n$.

(b) On considère la fonction φ , définie pour tout réel λ de $]0;+\infty[$ par $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.

Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

7. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2 , $Z_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$.

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

La suite $(Z_n)_{n\geq 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.

On admet que la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ admet pour densité la fonction f_n définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \, , \, f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

(a) En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et que $E(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\lambda$.

(b) Déterminer un estimateur Z'_n, fonction simple de Z_n qui soit un estimateur sans biais de λ (c'est-à-dire tel que $E(Z'_n) = \lambda$).
