Chapitre 1

Propriétés des nombres réels

Compétences attendues.

- ✓ Maitriser les opérations usuelles sur les fractions, les puissances et les racines carrées.
- ✓ Développer ou factoriser une expression à l'aide des identités remarquables.
- ✓ Maitriser les opérations usuelles sur les inégalités.
- ✓ Faire le lien entre inégalités, intervalles et valeur absolue.
- ✓ Déterminer les racines d'un polynôme du second degré et en déduire sa forme factorisée et son signe.
- ✓ Résoudre une équation ou une inéquation à une inconnue.
- ✓ Calculer une somme ou un produit à l'aide des formules sur les sommes usuelles ou par télescopage.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Nombres et calculs

1.1 Les ensembles de nombres

Définition.

- Un **ensemble** est une collection ou un groupement d'objets distincts. Ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.

  L'unique ensemble constitué d'aucun élément est noté $\emptyset$ et appelé **ensemble vide**.

- Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on dit que x **appartient à** E ou que x est dans E et on écrit $x \in E$.

  Dans le cas contraire, on dit que x **n'appartient pas à** E et on écrit $x \notin E$.

Notations. Soient E un ensemble et x un élément de E. On notera :

- $\forall x \in E$ pour dire "pour tout x appartenant à E" ou "quel que soit x appartenant à E",
- $\exists x \in E$ pour dire "il existe un x dans E" ou "on peut trouver un x dans E".

Définition.

Soient E et F deux ensembles quelconques. E est **inclus** dans F si tout élément de E est un élément de F. On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F et on écrit dans ce cas $E \subset F$.

Beaucoup d'ensembles de nombres ont déjà été rencontrés au Lycée :

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3, \ldots$

  Par exemple, $1 \in \mathbb{N}$, $15 \in \mathbb{N}$, $\frac{20}{5} \in \mathbb{N}$. Par contre, $-5 \notin \mathbb{N}$, $10.3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, constitué des entiers naturels et de leurs opposés : $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

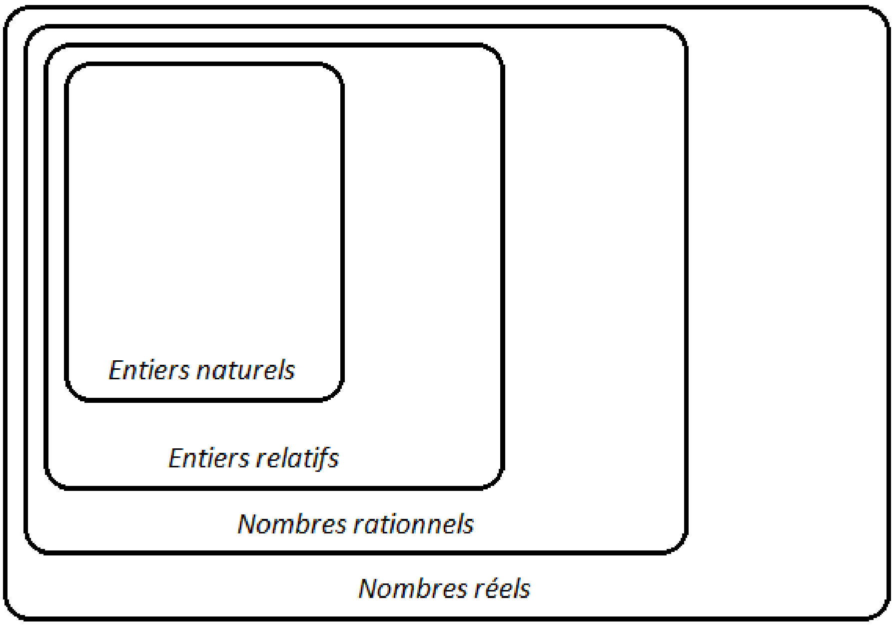
  Par exemple, $-17 \in \mathbb{Z}$, $35 \in \mathbb{Z}$, $-\frac{21}{7} \in \mathbb{Z}$. Par contre, $-3.7 \notin \mathbb{Z}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, $\pi \notin \mathbb{Z}$.

- L'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, constitué des quotients de deux entiers relatifs : ce sont les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$ et q est non nul.

  Par exemple, $-5 \in \mathbb{Q}$, $2.86 \in \mathbb{Q}$, $\frac{15}{37} \in \mathbb{Q}$. Par contre, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$.

- L'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$, constitué des **nombres rationnels** et des **nombres irrationnels** (qui ne peuvent pas s'écrire comme quotients de deux entiers relatifs).

  Par exemple, $-3.5 \in \mathbb{R}$, $\frac{17}{3} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$.



Remarque. $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. En particulier, on a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Notation. On note $\mathbb{R}_+$ (respectivement $\mathbb{R}_-$) l'ensemble des nombres réels positifs (respectivement des nombres réels négatifs). On note $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des nombres réels non nuls.

1.2 Calculs dans $\mathbb{R}$

Fraction de deux nombres réels

Définition.

Soient a et b deux nombres réels, b **non nul**.

- On appelle **fraction** de a par b le nombre réel noté $\dfrac{a}{b}$ vérifiant la relation $b \times \dfrac{a}{b} = a$.
- On dit que a est le **numérateur** et b le **dénominateur** de la fraction $\dfrac{a}{b}$.

Exemples.

- $3 \times 2 = 6$ donc $\dfrac{6}{3} = 2$.
- $2 \times 0 = 0$ donc $\dfrac{0}{2} = 0$. Plus généralement, on retiendra que pour tout réel b non nul : $\dfrac{0}{b} = 0$.
- $1 \times 5 = 5$ donc $\dfrac{5}{1} = 5$. Plus généralement, on retiendra que pour tout réel a : $\dfrac{a}{1} = a$.
- $4 \times 1 = 4$ donc $\dfrac{4}{4} = 1$. Plus généralement, on retiendra que pour tout réel b non nul : $\dfrac{b}{b} = 1$.

Attention.

Le **dénominateur d'une fraction** doit être **non nul**.
Par exemple, $\dfrac{3}{0}$ n'existe pas car il n'existe pas de nombre réel x tel que $0 \times x = 3$.

Propriété 1 (Opérations sur les fractions)

Soient a, b, c, d, k des nombres réels.

(1) Si b est non nul, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$.

(2) Si b et d sont non nuls, $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$.

(3) Si b et k sont non nuls, $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$.

(4) Si b, c et d sont non nuls, $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)} = \left(\dfrac{a}{b}\right) \times \left(\dfrac{d}{c}\right)$.

Exemples. Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{25}{8} - \frac{27}{24} + \frac{11}{11}$$

$$B = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \times \left(-7 + \frac{5}{3} + \frac{44}{6}\right)$$

$$C = 10 - 4 \times \frac{\left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right)\left(3 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{9} - 3} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

Puissance entière d'un nombre réel

Définition.

Si a est un nombre réel non nul et n un entier naturel non nul, alors on pose :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \quad \text{(il y a } n \text{ facteurs } a \text{ dans le produit).}$$

Par convention, $a^0 = 1$. De plus, on note a^{-n} l'inverse de a^n, c'est-à-dire $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Remarque. En particulier, $a^1 = a$, $a^2 = a \times a$, $a^3 = a \times a \times a$... Et $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Propriété 2 (Opérations sur les puissances)

Soient a et b deux nombres réels non nuls et m et n deux entiers relatifs. Alors :

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

(2) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$; $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

Exemples. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{12^5}{3^4 2^{11}}$$

$$B = \frac{18 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}}$$

$C = 8 \times (7 \times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$

Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition.

Si $a \in \mathbb{R}_+$, la **racine carrée** de a est le nombre réel **positif**, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à a :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a.$$

Exemple. On pourra retenir les valeurs remarquables suivantes :

$$\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{1} = 1,\ \sqrt{4} = 2,\ \sqrt{9} = 3,\ \sqrt{16} = 4,\ \sqrt{25} = 5,\ \sqrt{36} = 6,\ \sqrt{49} = 7\ldots$$

Attention.

On **ne peut pas** faire la **racine carrée** d'un nombre réel **strictement négatif**.
Par exemple, $\sqrt{-1}$ n'existe pas car il n'existe pas de nombre réel positif x tel que $x^2 = -1$.

Propriété 3 (Opérations sur les racines carrées)

Soient a et b deux réels positifs. Alors :

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

(2) Si $b \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Exemples. Simplifier les expressions suivantes :

$A = (\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)$

$B = \sqrt{6} \times \sqrt{14} \times \sqrt{18} \times \sqrt{7}$

$C = \dfrac{3\sqrt{5} + \sqrt{20}}{\sqrt{45}\left(2 - \dfrac{5}{6} + \dfrac{4}{3}\right)}$

Méthode.

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Pour simplifier une fraction de la forme $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la **quantité conjuguée** de $a+\sqrt{b}$, c'est-à-dire $a-\sqrt{b}$:

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$$

Exemples. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{\sqrt{12}}{2(\sqrt{3}+2)}$$

1.3 Identités remarquables

Propriété 4 (Identités remarquables)

Soient a et b deux nombres réels quelconques. Alors :

- En degré 2,

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ a^2-b^2 & = & (a+b)(a-b) \end{array}$$

- En degré 3,

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 & = & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ a^3-b^3 & = & (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3 & = & (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{array}$$

Exemples. Développer les expressions suivantes :

$$A(x) = (x-1)^2-(x+1)^2$$

$B(x) = (x - \sqrt{2})^3$

$C(x) = (x^2 + x + 1)^3$

Exemples. Factoriser les expressions suivantes :

$D(x) = (x^2 - 9) - (2x - 6)(x + 2)$

$E(x) = (x + 1)^3 - 8x^3$

$F(x) = x^4 - 16$

2 Ordre dans $\mathbb{R}$

2.1 Inégalités

Définition.

Soient a et b deux nombres réels.

- On dit que a est **inférieur ou égal** à b et on note $a \leq b$ si $b - a \in \mathbb{R}_+$.
- On dit que a est **supérieur ou égal** à b et on note $a \geq b$ si $b - a \in \mathbb{R}_-$.
- On dit que a est **inférieur strictement** à b et on note $a < b$ si $b - a \in \mathbb{R}_+^*$.
- On dit que a est **supérieur strictement** à b et on note $a > b$ si $b - a \in \mathbb{R}_-^*$.

Méthode.

Pour comparer deux nombres réels a et b, on étudie le signe de leur différence $b - a$.

Exemples.

- Comparer $\frac{7}{8}$ et $\frac{8}{9}$.

- Comparer 3 et $\sqrt{8}$.

Propriété 5 (Opérations sur les inégalités)

Soient a, b, c, d des nombres réels.

(1) $a \leq b$ équivaut à $a + c \leq b + c$.

(2) Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

(3) Pour tout $c < 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \geq bc$.

(4) Pour tout $c > 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \leq bc$.

(5) Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

(6) Si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

(7) Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.

(8) Si $0 \leq a \leq b$, alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Méthode.

Pour encadrer une expression dépendant d'une inconnue x, il est possible de raisonner par construction :

1. On part de l'inégalité vérifiée par x.
2. Avec les différentes opérations sur les inégalités, on construit le terme que l'on veut encadrer.

Exemples.

1. Sachant que $-2 \leq x \leq 6$, déterminer un encadrement de $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

2. Sachant que $-4 \leq x \leq 5$, déterminer un encadrement de $(6 - x)^2$.

2.2 Intervalles

Définition.

Un **intervalle réel** est l'ensemble des nombres réels compris entre deux valeurs constituant la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle. Les bornes d'un intervalle peuvent appartenir ou non à l'intervalle.

Exemples. Voici les différents types d'intervalles que l'on peut rencontrer :

- Intervalles bornés ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) :
  $]a, b[=$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ (intervalle ouvert).
  $[a, b[=$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x < b$ (intervalle semi-ouvert).
  $]a, b] =$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x \leq b$ (intervalle semi-ouvert).
  $[a, b] =$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x \leq b$ (intervalle fermé).
- Intervalles non bornés ($a \in \mathbb{R}$) :
  $]a, +\infty[=$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x$ (intervalle ouvert).
  $[a, +\infty[=$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x$ (intervalle fermé).
  $]-\infty, a[=$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x < a$ (intervalle ouvert).
  $]-\infty, a] =$ ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq a$ (intervalle fermé).

Remarques.

1. Lorsqu'un intervalle est fermé borné, c'est-à-dire de la forme $[a, b]$, on parlera de **segment**.
2. Un intervalle réduit à un point se note $\{a\}$ et est appelé **singleton**.

Définition.

Soient a et b sont deux entiers tels que $a < b$.
On note $[\![a, b]\!]$ l'**intervalle entier** correspondant à l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq n \leq b$.

Exemples. $[\![-2, 5]\!] = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $[\![1, +\infty[\![= \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N}^*$.

2.3 Valeur absolue

Définition.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de a est le nombre réel noté $|a|$ défini par :

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{si} \quad a \leq 0. \end{cases}$$

Exemples. Écrire sans barres de valeurs absolues les nombres suivants :

$|0| =$ $\qquad \left|\frac{3}{2}\right| =$ $\qquad \left|-\sqrt{2}\right| =$ $\qquad |\pi - 5| =$ $\qquad \left|5 - \sqrt{3}\right| =$

Interprétation géométrique. La valeur absolue d'un réel représente sa distance avec 0. Si a et b sont deux réels, $|b - a|$ est la **distance** de a à b, notée aussi $d(a, b)$.

Propriété 6 (Valeur absolue d'un nombre réel)

(1) Pour tout réel a,
   (a) $|a| \geq 0$, (b) $|-a| = |a|$, (c) $\sqrt{a^2} = |a|$.

(2) Pour tout réel a et pour tout réel positif b,

$$|a| = b \text{ équivaut à } a = b \text{ ou } a = -b.$$

En particulier, $|a| = 0$ équivaut à $a = 0$.

(3) Pour tous réels a, b,
   (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire).
   (b) $|a| \times |b| = |a \times b|$ et, si $b \neq 0$, $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$.

Propriété 7 (Intervalles et valeur absolue)

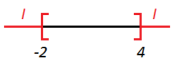
Soient a un réel quelconque et r un réel strictement positif. Alors :

(1) $|x-a| \leq r$ est équivalent à $x \in [a-r, a+r]$.

(2) $|x-a| \geq r$ est équivalent à $x \in]-\infty, a-r]$ ou $x \in [a+r, +\infty[$.

Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes et les intervalles fermés par des intervalles ouverts.

Exemples. Compléter le tableau suivant :

Tracer sur un axe	Traduction en valeurs absolues	Traduction en distances	Traductions avec des inégalités	Traduction avec des intervalles
	$\|x-1\| \leq 2$	$d(x,1) \leq 2$	$-1 \leq x \leq 3$	$x \in [-1,3]$
	$\|x-3\| \leq 1$			
		$d(x,-4) \leq 2$		
			$-2 \leq x \leq 2$	
				$x \in [6,10]$
	$\|x\| > 3$			
			$x \leq -4$ ou $x \geq 2$	
	$\|x+2\| < 1$			
				

3 Polynômes des premier et second degrés

3.1 Polynômes du premier degré

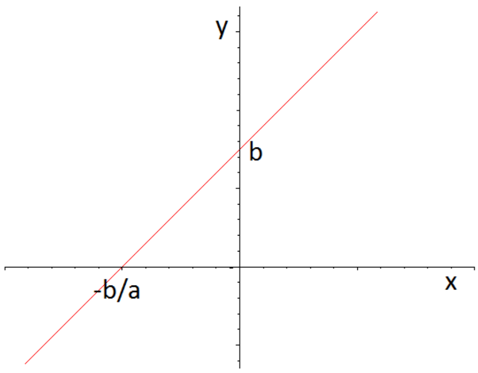
Propriété 8 (d'un polynôme du premier degré)

Soient a, b deux réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax + b$ un polynôme du premier degré.
Alors P admet **une unique racine** égale à $-\dfrac{b}{a}$ et on a le tableau de signe suivant :

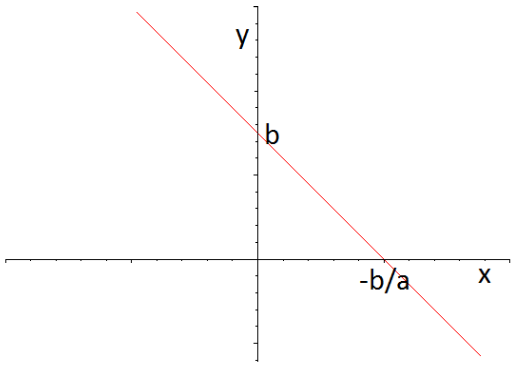
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Interprétation graphique. $P(x) = ax + b$ est une fonction affine. Elle est représentée graphiquement par une droite. a est le coefficient directeur de cette droite et b est son ordonnée à l'origine.
La racine $-\dfrac{b}{a}$ correspondent à l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses.

Cas où $a > 0$:



Cas où $a < 0$:



Exemple. Donner la représentation graphique des polynômes $P(x) = 2x - 3$ et $Q(x) = -x + 1$ et déterminer le signe de $P(x)$ et de $Q(x)$ en fonction de x.

3.2 Polynômes du second degré

Théorème 9 (Racines d'un polynôme du second degré)

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$, $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.
On appelle **discriminant** du polynôme P le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$. Alors :

- Si $\Delta > 0$, P admet **deux racines distinctes** $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a la factorisation suivante :
$$P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, P admet **une unique racine double** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation suivante :
$$P(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, P admet **aucune racine** et il ne peut pas être factorisé. En particulier, $P(x)$ est non nul pour tout $x \in \mathbb{R}$ et du signe du coefficient a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

Preuve. On commence par mettre le polynôme P sous **forme canonique** :

Le discriminant Δ permet de "discriminer" entre les différents cas selon son signe :

- Si $\Delta > 0$,

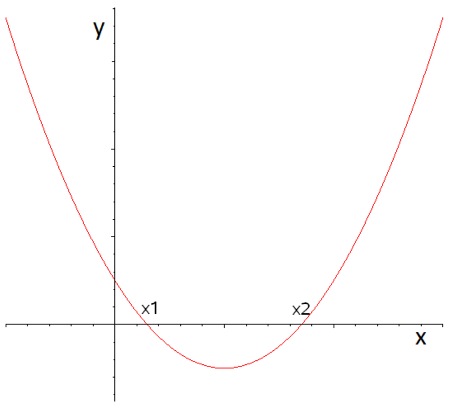
- Si $\Delta = 0$,

- Si $\Delta < 0$,

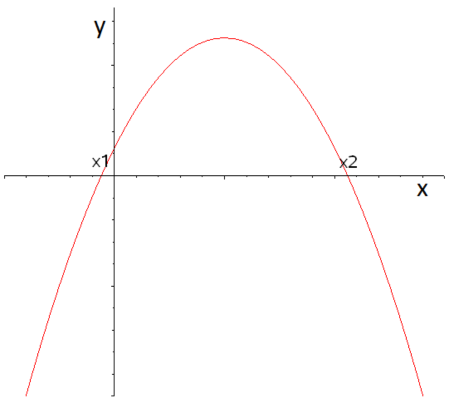
$\square$

Interprétation graphique. La représentation graphique de $P(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole** dont l'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$. La parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.
Les racines éventuelles correspondent aux abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Cas où $a > 0$:



Cas où $a < 0$:



Exemple. On considère les polynômes $P(x) = x^2 + x - 6$ et $Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$.

1. Déterminer les racines des polynômes P et Q, puis les mettre sous forme factorisée.

2. Déterminer le signe de $P(x)$ et de $Q(x)$ en fonction de x.

3. Donner la représentation graphique des polynômes P et Q.

4 Équations et inéquations

4.1 Équations

Définition.

- Une **équation** est une **égalité** entre deux expressions mathématiques appelées **membres** de l'équation, et où figure une ou plusieurs **inconnues**.
- **Résoudre** une équation, c'est déterminer toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité entre les deux membres de l'équation est vérifiée.
- Deux équations (E_1) et (E_2) sont **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

  Dans ce cas, on notera : $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$.

On se limitera dans ce chapitre au cas des équations à une inconnue.

Propriété 10 (Opérations élémentaires sur les équations)

(1) Lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un même nombre réel aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.

(2) Lorsqu'on multiplie (ou divise) par un même nombre réel **non nul** les deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.

Méthode.
Pour résoudre une équation :

1. On la met sous la forme $A(x) = 0$ à l'aide des opérations élémentaires.
2. Deux cas sont alors possibles :
   - Si l'inconnue x n'apparait pas au dénominateur :
     On factorise A. On obtiendra ainsi un produit de facteurs qui sera nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   - Si l'inconnue x apparait au dénominateur :
     On met l'équation $A(x) = 0$ sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ et on factorise P et Q.
     L'équation $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ est alors équivalente au système d'équations :
     $$\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$
3. On termine la résolution en donnant l'ensemble des solutions.

Exemples. Résoudre les équations suivantes :

$(E_1) : \sqrt{2}(x + 3\sqrt{2}) = x + 7$

$(E_2) : (2x + 1)^2 = (x - 2)^2$

$$(E_3) : \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$$

4.2 Inéquations

Définition.

- Une **inéquation** est une **inégalité** entre deux expressions mathématiques appelées **membres** de l'inéquation, et où figure une ou plusieurs **inconnues**.
- **Résoudre** une inéquation, c'est déterminer toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles l'inégalité entre les deux membres de l'inéquation est vérifiée.
- Deux inéquations (I_1) et (I_2) sont **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.
  Dans ce cas, on notera : $(I_1) \Leftrightarrow (I_2)$.

On se limitera dans ce chapitre au cas des inéquations à une inconnue.

Propriété 11 (Opérations élémentaires sur les inéquations)

(1) Lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente en conservant l'ordre.

(2) Lorsqu'on multiplie (ou divise) par un même nombre réel **strictement positif** les deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente en **conservant l'ordre**.

(3) Lorsqu'on multiplie (ou divise) par un même nombre réel **strictement négatif** les deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente en **changeant l'ordre**.

Méthode.

Pour résoudre une inéquation :

1. On la met sous la forme $A(x) \geq 0$ (ou $A(x) \leq 0$ ou $A(x) > 0$ ou $A(x) < 0$) à l'aide des opérations élémentaires.
2. Deux cas sont alors possibles :
   - Si l'inconnue x n'apparait pas au dénominateur :
     On factorise A puis on construit le tableau de signe.
   - Si l'inconnue x apparait au dénominateur :
     On met l'inéquation $A(x) \geq 0$ sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ et on factorise P et Q. On construit alors le tableau de signe en n'oubliant pas d'enlever les valeurs interdites (c'est-à-dire les racines de Q).
3. On termine la résolution en donnant l'ensemble des solutions.

Exemples. Résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1) : 2x + 3 \leq 5x - 4$

$(I_2) : x(x + 2) < (2x - 1)(x + 2)$

$(I_3) : \dfrac{2x + 1}{x + 3} \leq 3$

5 Notations somme, produit et factorielle

5.1 Notation Σ

Définition.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ des réels.

- La **somme** des $(n+1)$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ se note symboliquement :

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Elle se lit "somme de k égal 0 à n des x_k". La variable k est l'**indice de la somme** et 0 et n sont les **bornes de la somme**.

- Plus généralement, si $p \leq n$, la **somme** des $(n - p + 1)$ réels $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ se note symboliquement :

$$x_p + x_{p+1} + \ldots + x_{n-1} + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k.$$

Remarque. L'indice d'une somme est dit muet : changer son nom n'affecte pas le calcul de la somme. Ainsi :

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{j=0}^{n} x_j = \ldots$$

Exemples.

1. Écrire les expressions suivantes sans le symbole $\sum$:
   - $\displaystyle\sum_{k=5}^{12} k^2$
   - $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} \frac{k}{1+k^2}$
   - $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} 2^k$
2. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:
   - $5 + 6 + \ldots + 15$
   - $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10}$
   - $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{20}{21}$

Théorème 12 (Opérations sur les sommes)

(1) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ et $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ des réels. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k.$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ des réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} x_k \quad \text{(factorisation par } \lambda \text{ qui ne dépend pas de l'indice).}$$

(3) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq m < n$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ des réels. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k \quad \text{(relation de Chasles).}$$

Preuve.

□

Théorème 13 (Sommes usuelles)

Soit $n, p \in \mathbb{N}$, avec $p \leq n$.

(1) Somme d'une constante a (indépendante de l'indice de sommation k) :

$$\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1) \times a.$$

(2) Sommes des premières puissances des n premiers entiers naturels :

$$(i) \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (ii) \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (iii) \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(3) Somme géométrique (avec $q \in \mathbb{R}^*$) :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } q = 1, \\ q^p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Preuve.

□

Méthode.

Pour calculer une somme $\sum_{k=p}^{n} x_k$, deux cas sont possibles :

- Si x_k est composé de termes apparaissant dans les sommes usuelles (constantes, k, k^2, k^3, q^k) :
  1. On décompose $\sum_{k=p}^{n} x_k$ en somme de sommes usuelles.
  2. On applique ensuite les formules sur les sommes usuelles.
- Si x_k est de la forme $u_{k+1} - u_k$ (on parle dans ce cas de somme télescopique) :
  1. On écrit $\sum_{k=p}^{n} x_k$ sans le symbole $\sum$.
  2. On simplifie l'expression pour obtenir le résultat.

Exemples. Calculer les sommes suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

- $\sum_{k=0}^{n} (3k^2 - k + 2)$

- $\sum_{k=n}^{2n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

- $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$

Remarque. Si n et p sont deux entiers naturels avec $p \leq n$ et m un entier (positif ou négatif), alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} x_k &= x_p + x_{p+1} + \ldots + x_{n-1} + x_n \\ &= x_{(p-m)+m} + x_{(p-m+1)+m} + \ldots + x_{(n-m-1)+m} + x_{(n-m)+m} \\ &= \sum_{i=p-m}^{n-m} x_{i+m}\end{aligned}$$

On dit que l'on a effectué le **changement d'indice** $i = k - m$.

Méthode.

Pour passer de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k$ à $\displaystyle\sum_{i=p-m}^{n-m} x_{i+m}$:

1. On pose $i = k - m$, c'est-à-dire $k = i + m$.
2. Dans le terme général de la somme, on remplace chaque k par $i + m$.
3. Pour les bornes :
   - Borne inférieur : lorsque $k = p$, $i = p - m$.
   - Borne supérieur : lorsque $k = n$, $i = n - m$.

On obtient alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{i=p-m}^{n-m} x_{i+m}$.

Exemples. Calculer les sommes suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

- $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k^2$

- $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n} (k-n)^2$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

5.2 Notation $\prod$

Définition.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, , x_{n-1}, x_n$ des réels.

- Le **produit** des $(n+1)$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ se note symboliquement :

$$x_0 \times x_1 \times \ldots \times x_{n-1} \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k.$$

Il se lit "produit de k égal 0 à n des x_k". La variable k est l'**indice du produit** et 0 et n sont les **bornes du produit**.

- Plus généralement, si $p \leq n$, le **produit** des $(n-p+1)$ réels $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ se note symboliquement :

$$x_p \times x_{p+1} \times \ldots \times x_{n-1} \times x_n = \prod_{k=p}^{n} x_k.$$

Remarque. Comme pour les sommes, l'indice d'un produit est muet :

$$x_0 \times x_1 \times \ldots \times x_{n-1} \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{i=0}^{n} x_i = \prod_{j=0}^{n} x_j = \ldots$$

Exemples.

1. Écrire les expressions suivantes sans le symbole $\prod$:

   - $\displaystyle\prod_{k=3}^{5} k^2$

   - $\displaystyle\prod_{k=2}^{7} \frac{k}{k+1}$

2. Écrire les produits suivants avec le symbole $\prod$:

   - $1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32$

- $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{6} \times \ldots \times \dfrac{9}{11}$

Théorème 14 (Opérations sur les produits)

(1) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ et $y_0, y_1, \ldots, , y_{n-1}, y_n$ des réels. Alors :

$$\prod_{k=0}^{n} (x_k \times y_k) = \left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right) \times \left(\prod_{k=0}^{n} y_k\right).$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ des réels et $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ des réels non nuls. Alors :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} x_k}{\prod\limits_{k=0}^{n} y_k}.$$

(3) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq m < n$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ des réels. Alors :

$$\prod_{k=0}^{n} x_k = \left(\prod_{k=0}^{m} x_k\right) \times \left(\prod_{k=m+1}^{n} x_k\right) \quad \text{(relation de Chasles).}$$

Preuve.

□

Exemples. Calculer les produits suivants en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 3$

- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{4^k}{2}$

5.3 Notation factorielle

Définition.

Pour tout entier naturel n, on appelle **factorielle** de n et on note $n!$ l'entier naturel défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Exemples.

1. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$							

2. Simplifier les expressions suivantes :
   - $\dfrac{7!}{5!}$
   - $\dfrac{10!}{8! \times 2!}$
   - $\dfrac{3! \times 7! \times 10!}{2! \times 8! \times 9!}$

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Simplifier les expressions suivantes :
   - $\dfrac{n!}{(n-1)!}$
   - $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$
   - $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!}$