Chapitre 12

Calcul différentiel

Compétences attendues.

- ✓ Justifier la dérivabilité d'une fonction en un point ou sur un intervalle.
- ✓ Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité d'une fonction et calculer sa dérivée.
- ✓ Étudier la convexité d'une fonction à l'aide des différentes caractérisations.
- ✓ Étudier les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec ou sans l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité en un point

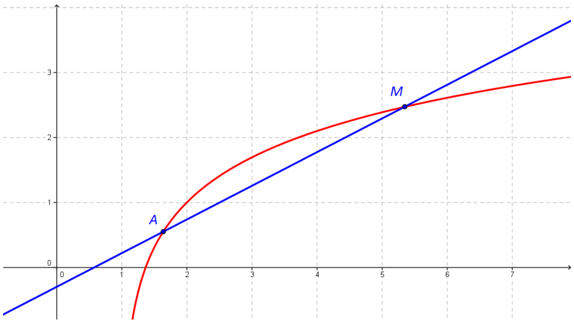
Définition de la dérivabilité en un point

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On appelle **taux d'accroissement** de f entre x et x_0 le quotient défini pour $x \neq x_0$ par :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Interprétation géométrique. Soit un réel x_0 et un point fixe $A(x_0, f(x_0))$. Considérons un réel x et un point courant $M(x, f(x))$. Le taux d'accroissement représente alors le coefficient directeur de la droite (AM).



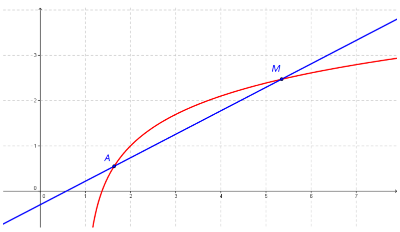
Définition.

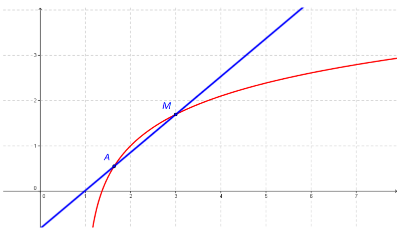
Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 telle que $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

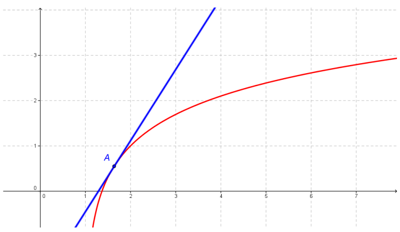
- On dit que f est **dérivable** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.
- Dans ce cas, on appelle alors **nombre dérivé** de f en x_0 le nombre réel noté $f'(x_0)$ défini par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Interprétation géométrique. f est donc dérivable en x_0 si la corde admet une position limite lorsque le point courant M tend vers le point fixe A : la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.







Méthode.

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction f en un point x_0 :

1. On calcule le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ pour $x \neq x_0$.
2. On détermine la limite de l'expression obtenue lorsque x tend vers x_0 (en levant la forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$). Deux cas sont possibles :
   - Si on obtient une limite finie ℓ, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
   - Sinon, f n'est pas dérivable en x_0.

Exemple. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0 :

1. $f(x) = x^2$ et $x_0 = 1$.

2. $g(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 4$.

3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-1/x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$.

Dérivabilité à gauche, à droite

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 telle que $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche lorsque x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f à gauche** en x_0 et elle est notée $f'_g(x_0)$:

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

- On définit de la même façon la notion de **dérivabilité de f à droite** en x_0 et de **nombre dérivé de f à droite** en x_0 :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Propriété 1 (Dérivabilité à gauche et à droite)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 telle que $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Alors :

$$f \text{ est } \textbf{dérivable} \text{ en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ est } \textbf{dérivable à droite et à gauche} \text{ en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Méthode.
L'étude de la dérivabilité à gauche et à droite de f en un point x_0 est pertinente si $f(x)$ s'exprime différemment à gauche et à droite de x_0.

Exemple. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0 :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$.

2. $g(x) = |x|$ et $x_0 = 0$.

3. $h(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$.

Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Propriété 2 (Tangente à la courbe représentative d'une fonction)

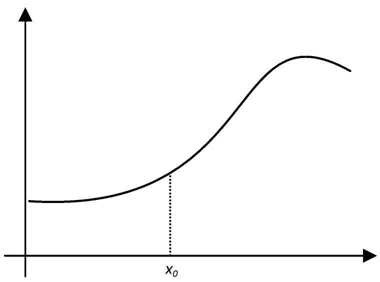
Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

(1) Si f **est dérivable** en x_0, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **tangente** au point $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette tangente a pour équation :

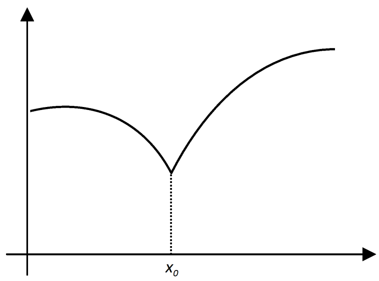
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

(2) Si f **n'est pas dérivable** en x_0 mais est **dérivable à gauche ou à droite** en x_0, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangentes** à gauche ou à droite au point $(x_0, f(x_0))$ (même équation en remplaçant $f'(x_0)$ par $f'_g(x_0)$ ou $f'_d(x_0)$).

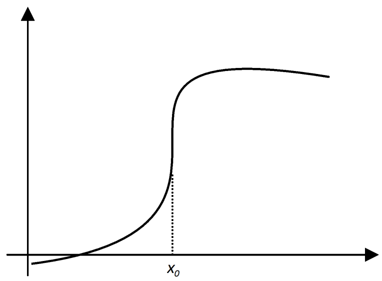
(3) Si f **n'est pas dérivable en** x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une **tangente verticale** au point $(x_0, f(x_0))$ d'équation $x = x_0$ (ou demi-tangente verticale si la limite n'est infinie qu'à gauche ou à droite en x_0).



f est dérivable en x_0



f n'est pas dérivable en x_0 mais est dérivable à gauche et à droite



f n'est pas dérivable en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

Dérivabilité et continuité

Théorème 3 (Continuité et dérivabilité)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 telle que $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

Si f est **dérivable** en x_0, alors f est **continue** en x_0.

Preuve.

$\square$

Attention.

1. Par contraposition, si une fonction n'est pas continue en un point x_0, alors elle n'est pas dérivable en x_0.

   Par exemple, la fonction **partie entière** n'est pas continue en les points entiers $x_0 \in \mathbb{Z}$. Elle n'est donc pas dérivable en ces points.

2. La réciproque de ce théorème est fausse. Une fonction continue en un point x_0 n'est pas forcément dérivable en x_0.

   Par exemple, nous avons démontré que les fonctions **racine carrée** et **valeur absolue** sont continues et non dérivables en 0.

3. On retiendra que :

$$\begin{array}{lcl} f \text{ dérivable en un point } x_0 & \Longrightarrow & f \text{ continue en un point } x_0 \\ f \text{ dérivable en un point } x_0 & \cancel{\Longleftarrow} & f \text{ continue en un point } x_0 \end{array}$$

1.2 Dérivabilité sur un intervalle

Fonction dérivable sur un intervalle

Définition.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **dérivable** sur I si f est **dérivable en tout point** de I. On note $D(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.
- Si f est **dérivable** sur I, on appelle **fonction dérivée** de f la fonction notée f' qui à tout réel $x \in I$ associe $f'(x)$.

Théorème 4 (Fonctions usuelles et dérivabilité)

(1) Les fonctions **polynomiales**, les fonctions **rationnelles**, les fonctions **logarithme** et **exponentielle**, les fonctions **puissances** sont dérivables partout où elles sont définies.

(2) Les fonctions **valeur absolue** et **racine carrée** sont dérivables partout où elles sont définies **sauf en** 0.

(3) Le tableau ci-dessous rassemble les dérivées à connaître :

Fonction $f(x) = ...$	Fonction dérivée $f'(x) = ...$
constante	0
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$(u(x))^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Théorème 5 (Opérations sur les fonctions dérivables)

(1) Soient f, g deux fonctions définies et **dérivables** sur un intervalle I et λ un réel. Alors :

- $f+g$, λf et fg sont **dérivables** sur I et pour tout $x \in I$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \qquad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est **dérivable** sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

(2) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$. Alors la **composée** $g \circ f$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\left(f(x)\right).$$

Méthode.
Lors de l'étude d'une fonction f, on déterminera dans l'ordre :

1. Le **domaine de définition** $\mathcal{D}_f$ de f à partir de l'expression de $f(x)$. S'il y a :
   - Un dénominateur : il faut supprimer de $\mathcal{D}_f$ les racines de ce dénominateur.
   - $\sqrt{u(x)}$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) \geq 0$ et restreindre $\mathcal{D}_f$ à l'ensemble des solutions.
   - $\ln(u(x))$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) > 0$ et restreindre $\mathcal{D}_f$ à l'ensemble des solutions.
2. Le **domaine de continuité** : c'est le même que le domaine de définition sauf s'il y a une **partie entière**.
3. Le **domaine de dérivabilité** : c'est le même que le domaine de continuité sauf s'il y a une **valeur absolue** ou une **racine carrée** (dans ce cas, il faut supprimer les valeurs qui annulent la valeur absolue ou la racine carrée).

Exemple. Calculer la dérivée des fonctions suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de chacune d'entre elles :

- $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

- $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

- $h(x) = \exp\left(\dfrac{1}{(2x-1)^2}\right)$

Méthode.
Pour calculer la dérivée d'une **fonction puissance** du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on commencera **toujours** par l'écrire sous **forme exponentielle** :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}.$$

Exemple. Calculer la dérivée de la fonction suivante après avoir déterminé son ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité :

- $i(x) = (2-x)^{\sqrt{x}}$

Propriété 6 (Fonction dérivable et bijective)

Soit f une fonction **bijective** d'un intervalle I sur un intervalle J. Si f est **dérivable** sur I et si f' **ne s'annule pas**, alors f^{-1} est **dérivable** sur J et on a :

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Fonction dérivée et monotonie

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est **cronstante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a : $f(x) = f(y)$.
- La fonction f est **croissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a : $f(x) \leq f(y)$.
- La fonction f est **décroissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a : $f(x) \geq f(y)$.
- La fonction f est **monotone** sur I si f est soit croissante, soit décroissante sur I.

Si les inégalités sont strictes, on dira que f est **strictement croissante** (ou **décroissante** ou **monotone**).

La dérivée d'une fonction est un outil très commode pour étudier le sens de variation d'une fonction :

Propriété 7 (Caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(1) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur I.

(2) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur I.

(3) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

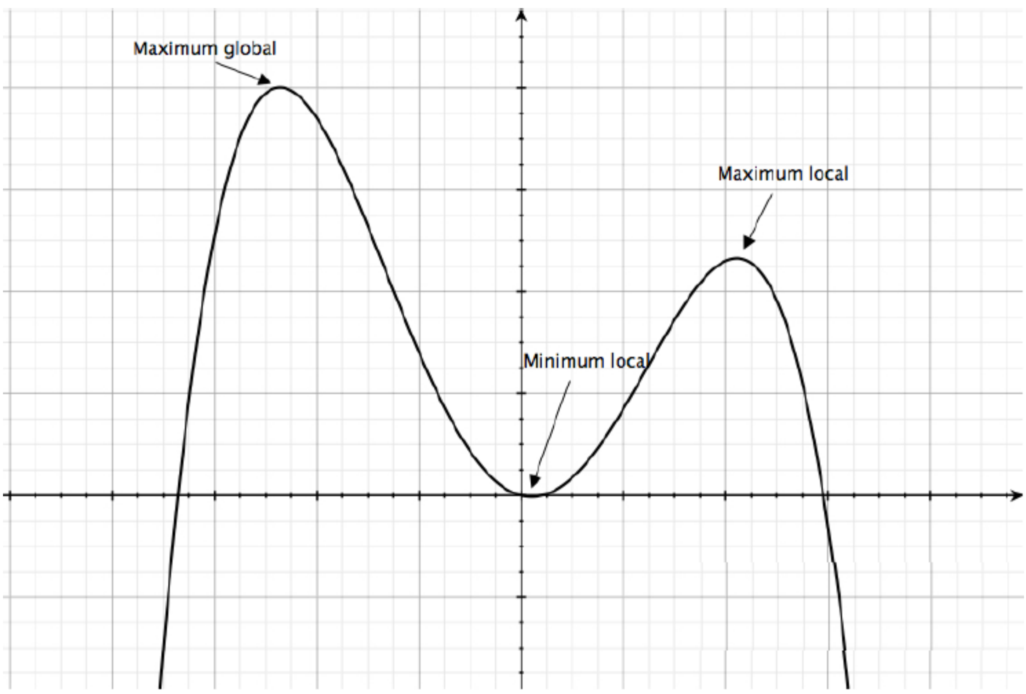
Fonction dérivée et extremums

Définition.

Soit f une fonction et x_0 un point de $\mathcal{D}_f$.

- f admet un **maximum global** en x_0 si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un **maximum local** en x_0 si, pour tout x suffisamment proche de x_0, on a : $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un **minimum global** en x_0 si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un **minimum local** en x_0 si, pour tout x suffisamment proche de x_0, on a : $f(x) \geq f(x_0)$.

Représentation graphique.



Nous donnons une condition nécessaire sur la dérivée d'une fonction pour avoir l'existence d'un extremum local (maximum local ou minimum local) sur un intervalle ouvert :

Propriété 8 (Condition nécessaire d'extremum)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si f possède un **extremum local** en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Attention.

La réciproque de cette propriété est fausse. La nullité de $f'(x_0)$ n'implique pas l'existence d'un extremum local en x_0.
Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ n'admet pas d'extremum local en 0 (elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) et pourtant sa dérivée s'annule en 0 ($f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$).

Le théorème suivant fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette un extremum local :

Théorème 9 (Condition nécessaire et suffisante d'extremum)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

f possède un **extremum local** en x_0 $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ et f' **change de signe** en x_0

Remarques.

1. Si f' passe d'une valeur négative à une valeur positive, l'extremum local est un minimum.
2. Si f' passe d'une valeur positive à une valeur négative, l'extremum local est un maximum.

1.3 Dérivées successives

Définition.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I, on appelle la dérivée de f' la **dérivée seconde** de f et on la note f''.
- Plus généralement, on peut définir la **dérivée n-ième** de f, notée $f^{(n)}$, par récurrence :

  0) $f^{(0)} = f : I \to \mathbb{R}$.

  1) Si f est dérivable sur I, on note $f^{(1)} = f' : I \to \mathbb{R}$.

  2) Si f' est dérivable sur I, on note $f^{(2)} = f'' : I \to \mathbb{R}$.

  $\vdots$

  n) Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \to \mathbb{R}$.
- On dira alors que f est n **fois dérivable** sur I si elle est $n-1$ **fois dérivable sur** I et si $f^{(n-1)}$ est **dérivable** sur I.

Attention.

Il ne faut pas confondre f^n qui est la puissance n-ième de la fonction f et $f^{(n)}$ qui est la dérivée n-ième de la fonction f.

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est de **classe C^n sur** I ou est n **fois continûment dérivable sur** I si f est n **fois dérivable** sur I et si $f^{(n)}$ est **continue** sur I. On note $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^n.

  En particulier, on note $C^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I et $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et dont la dérivée est continue.

- On dit que f est de **classe C^∞ sur** I ou est **indéfiniment dérivable sur** I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I. On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞.

  On a donc : $C^\infty(I) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$.

Théorème 10 (Dérivées successives et fonctions usuelles)

(1) Les fonctions **polynomiales**, les fonctions **rationnelles**, les fonctions **logarithme** et **exponentielle**, les fonctions **puissances** sont de classe C^∞ sur leurs ensembles de définition.

(2) Les fonctions **valeur absolue** et **racine carrée** sont de classe C^∞ sur leurs ensembles de définition privés de 0.

Théorème 11 (Dérivées successives et opérations)

(1) Le **produit par un réel** d'une fonction de classe C^n (respectivement de classe C^∞) est une fonction de classe C^n (respectivement de classe C^∞).

(2) La **somme** ou le **produit** de deux fonctions de classe C^n (respectivement de classe C^∞) est une fonction de classe C^n (respectivement de classe C^∞).

(3) L'**inverse** d'une fonction de classe C^n (respectivement de classe C^∞) qui **ne s'annule pas** est une fonction de classe C^n (respectivement de classe C^∞).

(4) La **composée**, lorsqu'elle est définie, de deux fonctions de classe C^n (respectivement de classe C^∞) est une fonction de classe C^n (respectivement de classe C^∞).

Exemple. Expliciter les dérivées n-ième des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^k$

2. $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$

2 Convexité

2.1 Fonctions convexes, fonctions concaves

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

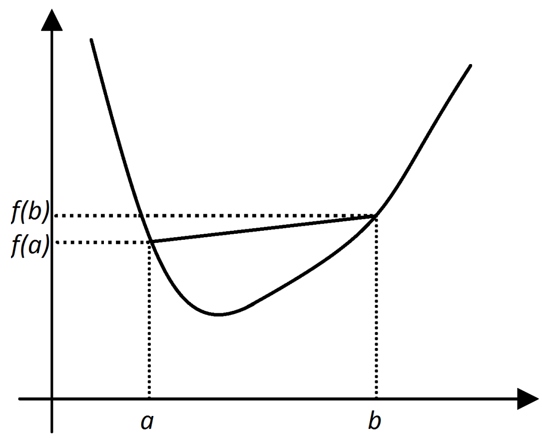
- On dit que f est **convexe** sur I si, pour tous $a, b \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

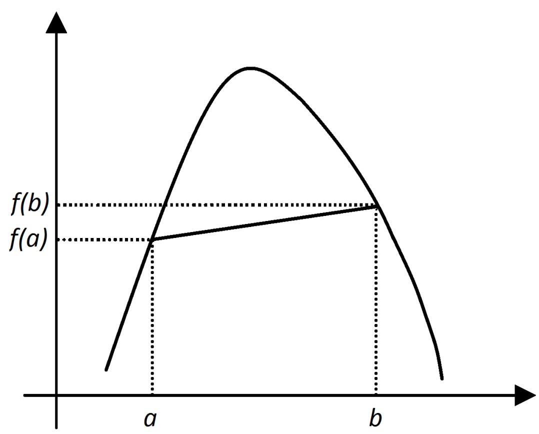
- On dit que f est **concave** sur I si, pour tous $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Interprétation géométrique.



f est **convexe** si l'image de tout point du segment $[a, b]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



f est **concave** si l'image de tout point du segment $[a, b]$ est **au dessus de la corde** passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Remarques.

1. L'ensemble des réels $ta + (1-t)b$ lorsque t parcourt $[0, 1]$ est l'ensemble des points du segment $[a, b]$.
2. f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. Ainsi les propriétés sur les fonctions concaves peuvent se déduire facilement des propriétés sur les fonctions convexes.

2.2 Caractérisation de la convexité

Propriété 12 (Première caractérisation des fonctions convexes de classe C^1)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Alors :

(1) f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I.

(2) f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I.

Il existe une deuxième caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 à l'aide des tangentes à la courbe représentative :

Propriété 13 (Deuxième caractérisation des fonctions convexes de classe C^1)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Alors :

(1) f est **convexe** sur I si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est **au dessus** de chacune de ses tangentes.

(2) f est **concave** sur I si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de chacune de ses tangentes.

Pour les fonctions de classe C^2, on utilisera plutôt la caractérisation suivante pour démontrer qu'une fonction est convexe ou concave :

Théorème 14 (Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I. Alors :

(1) f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

(2) f est **concave** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

Méthode.

La convexité d'une fonction f peut permettre de démontrer certaines inégalités en utilisant :

- soit que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses cordes,
- soit que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de chacune de ses tangentes.

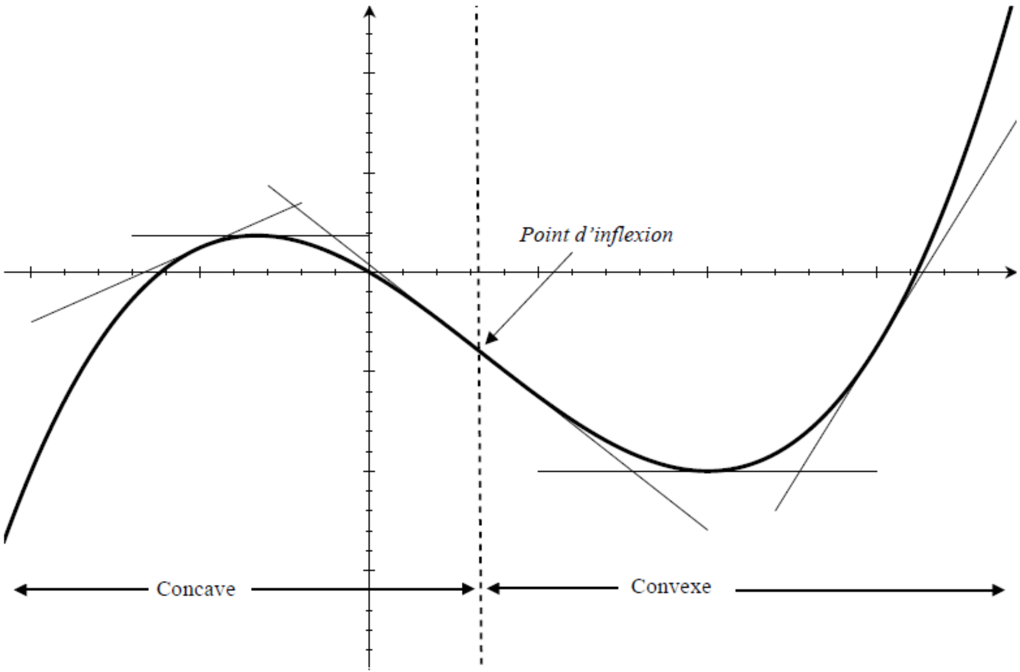
Exemple. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $1 + x \leq e^x \leq (e-1)x + 1$.

2.3 Points d'inflexions

Définition.

Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 de son ensemble de définition.
On dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}_f$ si f opère un changement de convexité en x_0 (c'est-à-dire passe de convexe à concave ou de concave à convexe).

Remarque. Soit f une fonction dérivable en x_0. Alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$ si et seulement si la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point traverse $\mathcal{C}_f$.



Théorème 15 (Caractérisation des points d'inflexions pour les fonctions de classe C^2)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
Alors $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de f si et seulement si f'' **s'annule et change de signe** en x_0.

Exemple. Considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f.

2. Montrer que f admet un point d'inflexion noté A dont on déterminera les coordonnées.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en A.

4. Tracer dans un même repère la courbe représentative de f et sa tangente au point A.

3 Inégalité des accroissements finis

3.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème 16 (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction **continue** et **dérivable** sur un intervalle I et dont la **dérivée est bornée** sur I, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ où M est une constante. Alors :

$$\forall a, b \in I,\ |f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|$$

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1. Déterminer f' puis un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. En déduire que : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ |f(b) - f(a)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|b - a|$.

3.2 Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre 1, c'est-à-dire définie de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

où f est une fonction **continue** et **dérivable**. On cherche à étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 17 (Limites finies possibles d'une suite récurrente)

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une **limite finie** ℓ.
Alors, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$. En d'autres termes, les **limites finies possibles** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les **points fixes** de f.

Méthode.
L'inégalité des accroissements finis permet d'étudier la distance entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite possible ℓ et de montrer que cette distance tend vers 0.

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et positif.

2. Étudier les limites finies possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|u_n - 2|$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - 2| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.