Chapitre 14

Séries réelles

Compétences attendues.

- ✓ Étudier la convergence et calculer la somme d'une série après avoir explicité sa somme partielle (en particulier dans le cas d'une série télescopique).
- ✓ Étudier la convergence et calculer la somme d'une série à l'aide des séries usuelles (géométriques et exponentielle).
- ✓ Étudier la convergence d'une série à termes positifs à l'aide du théorème de comparaison.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit alors que :

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **série de terme général** u_n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la **somme partielle de rang** n de la série.

Notation. La série de terme général u_n est souvent notée $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$. Attention, ceci est juste une notation sans aucun sens sommatoire.

Remarque. Il est possible que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on changera la borne inférieure des sommes partielles que l'on rencontre :

$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

1.2 Nature d'une série

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée est convergente. Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** et on note :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

  En particulier, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $\pm\infty$, on dit que la série $\sum u_n$ diverge vers $\pm\infty$.

Remarque. La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge.}$$

Méthode.

Si on est capable de calculer la somme partielle S_n d'une série, alors on peut donner facilement la nature de la série (en déterminant si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou diverge), et obtenir la somme de la série lorsqu'elle converge (c'est $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$).

Exemples. Expliciter les sommes partielles d'ordre n de chacune des séries suivantes et en déduire si elles convergent.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$

2. $\sum_{n\geq 0} 2^n$

3. $\sum_{n\geq 0} n$

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ (on pourra remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$)

1.3 Opérations sur les séries convergentes

Théorème 1 (Opérations sur les séries convergentes)

(1) Pour tout $\lambda \neq 0$, $\sum u_n$ **converge** si et seulement si $\sum \lambda u_n$ **converge** et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

(2) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **convergentes**, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ **converge** et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Attention.

Il est possible que la série $\sum (u_n + v_n)$ converge alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. **On ne peut donc pas scinder la somme d'une série convergente en deux sommes sans avoir vérifié au préalable que ces deux séries convergent**.

2 Conditions de convergence

2.1 Condition nécessaire

Théorème 2 (Condition nécessaire de convergence)

(1) Si la série $\sum u_n$ **converge**, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(2) Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne converge pas vers** 0, alors la série $\sum u_n$ diverge, et on dit qu'elle **diverge grossièrement**.

Preuve.

$\square$

Attention.

La réciproque de ce théorème est **fausse** : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ n'implique pas que $\sum u_n$ converge.

Exemple.

1. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2. Expliciter la somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et en déduire sa nature.

2.2 Séries à termes positifs

Théorème 3 (Convergence d'une série à termes positifs)

Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs**, c'est-à-dire que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.
Dans ces conditions, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$ est croissante (car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$) et on a :

- Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors la série $\sum u_n$ **converge**.
- Sinon, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série **diverge** vers $+\infty$.

Exemple.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

2. En sommant les inégalités précédentes, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$.

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Propriété 4 (Comparaison des séries à termes positifs)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors :

(1) Si la série $\sum v_n$ **converge**, alors $\sum u_n$ **converge** aussi et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(2) Si la série $\sum u_n$ **diverge** vers $+\infty$, alors $\sum v_n$ **diverge** aussi vers $+\infty$.

Exemple.

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a : $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition.

Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque. L'étude de la convergence absolue d'une série permet de se ramener à une série à termes positifs et de pouvoir ainsi appliquer les résultats du paragraphe précédent.

Théorème 5 (Condition suffisante de convergence)

Une série **absolument convergente** est **convergente**.

Exemple. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente et donc convergente.

En effet, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et on a démontré précédemment que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Attention.

La réciproque de ce théorème est **fausse**.

Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente (voir le TD14). Par contre, elle n'est pas absolument convergente car $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et on a vu précédemment que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

3 Séries usuelles

3.1 Séries géométriques

Définition.

Soit q un réel. On dit que :

- $\sum_{n\geq 0} q^n$ est la **série géométrique de raison** q.
- $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ est la **série géométrique dérivée d'ordre** 1 **et de raison** q.
- $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ est la **série géométrique dérivée d'ordre** 2 **et de raison** q.

Théorème 6 (Séries géométriques)

Les séries $\sum_{n\geq 0} q^n$, $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $-1 < q < 1$ et, dans ce cas, on a les égalités suivantes :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q} \text{ (avec } p \in \mathbb{N}) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Méthode.

Pour démontrer la convergence d'une série de "type géométrique" et calculer sa somme :

1. On décompose le terme général de la série en somme de termes de la forme q^n, nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$.
2. On justifie la convergence de chacune des séries géométriques qui apparaissent puis, par somme, de la série de départ.
3. On calcule la somme de la série à l'aide des formules sur les séries géométriques.

Exemples. Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{2^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+(-1)^n}{3^n}$

3.2 Série exponentielle

Définition.

Étant donné un réel x, on dit que $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est la **série exponentielle de paramètre** x.

Théorème 7 (Série exponentielle)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Méthode.

Pour démontrer la convergence d'une série de "type exponentielle" et calculer sa somme :

1. On décompose le terme général de la série en somme de termes de la forme $\frac{x^n}{n!}$.
2. On justifie la convergence de chacune des séries exponentielles qui apparaissent puis, par somme, de la série de départ.
3. On calcule la somme de la série à l'aide de la formule sur les séries exponentielles (en faisant des changements d'indice si nécessaire).

Exemples. Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n3^n}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!}$

3.3 Séries de Riemann

Définition.

Étant donné un réel α, on appelle **série de Riemann de paramètre** α la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

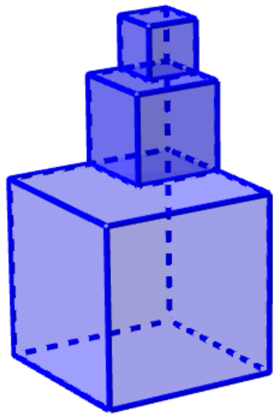
Théorème 8 (Séries de Riemann)

La **série de Riemann** $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples. On retrouve certains résultats déjà démontrés :

- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n$ est une série de Riemann de paramètre -1. Elle est divergente.
- La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann de paramètre 1. Elle est divergente.
- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre 2. Elle est convergente.

Exemple. Piles et sommes de Riemann.



Imaginons un empilement de cubes de bois d'arêtes de longueurs 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... à l'infini.

Bien que de hauteur infinie (puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge), il ne faudrait qu'une quantité finie de peinture pour recouvrir cette pile (la surface des cubes étant d'aire égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2}$ qui converge), et une quantité finie de bois pour la fabriquer (le volume des cubes étant lui égal à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ qui converge aussi).

Remarques.

1. A l'aide des séries de Riemann, il est aussi possible de construire une pile de cartes qui penche à l'infini. Ce lien vous explique comment.
2. Les séries de Riemann sont à la base d'une des questions encore ouvertes les plus importantes des mathématiques : l'hypothèse de Riemann. Si les séries de Riemann vous passionnent, si vous voulez devenir riche et célèbre, ce lien pourrait vous y aider.