Chapitre 15

Espaces vectoriels et applications linéaires

1 Espaces vectoriels **2**
1.1 Définitions 2
1.2 Sous-espaces vectoriels 4
1.3 Bases d'un espace vectoriel 7

2 Applications linéaires **13**
2.1 Définitions 13
2.2 Noyau d'une application linéaire 16
2.3 Image d'une application linéaire 18

Compétences attendues.

✓ Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.

✓ Déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.

✓ Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel à partir d'une famille génératrice.

✓ Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel.

✓ Montrer qu'une application est linéaire.

✓ Déterminer le noyau d'une application linéaire.

✓ Déterminer l'image d'une application linéaire.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions

Définition.

Soit E un ensemble non vide.

- On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur E si : $\forall x, y \in E$, $x + y \in E$.
- On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si : $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot x \in E$.

Exemple. Soit $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à 3 lignes et 1 colonne. Alors :

- E possède une **loi de composition interne** que l'on note $+$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- E possède une **loi de composition externe** que l'on note $\cdot$:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition.

Un ensemble non vide est un **espace vectoriel** si :

1) E est muni d'une **loi de composition interne** $+$ vérifiant les propriétés suivantes :

   a) $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$ (commutativité).
   b) $\forall x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité).
   c) $\exists 0_E \in E$ tel que $\forall x \in E$, $0_E + x = x + 0_E = x$ (élément neutre).
   d) $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ tel que $x + y = y + x = 0_E$ (y est l'opposé de x).

2) E est muni d'une **loi de composition externe** $\cdot$ vérifiant les propriétés suivantes :

   a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
   b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x$, $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.
   c) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
   d) $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$.

Remarques.

1. Soit E un espace vectoriel. Les éléments x de E sont appelés **vecteurs** et les réels λ sont appelés **scalaires**.
2. L'**élément neutre** 0_E est unique.
3. Si $x \in E$, l'**opposé** de x est unique et est noté $-x$.
4. Le symbole $\cdot$ de la loi de composition externe qui se trouve entre un scalaire et un vecteur est souvent omis. Par contre, l'ordre est important : on écrira toujours **les scalaires à gauche des vecteurs**.
5. Il n'existe, a priori, pas de multiplication entre deux vecteurs.

Théorème 1 (Espaces vectoriels de référence)

Pour tout entier naturel non nul n, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de l'addition $+$ et du produit par un scalaire $\cdot$ est un **espace vectoriel**.

Exemple. Considérons toujours $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

- L'**élément neutre** de E est $0_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- L'**opposé** d'un élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de E est $-\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$, on a :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Cette année, nous allons travailler uniquement dans le cadre d'un espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Une présentation plus générale sera donnée en deuxième année.
Dans toute la suite, on suppose donc que E **désigne l'espace vectoriel** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **avec** $n \in \{1, 2, 3, 4\}$**.**

Définition.

Soit p un entier naturel.

- Une **famille de vecteurs** de E est un p-uplet $(e_1, \ldots, e_p)$ formé de p vecteurs de E.
- Un vecteur $x \in E$ est une **combinaison linéaire** d'une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de p vecteurs s'il existe p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i.$$

Les scalaires λ_i sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Méthode.

Pour montrer qu'un vecteur x de E est combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de p vecteurs, il faut montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$. Cette recherche conduit à la résolution d'un système linéaire.

Exemple. On considère les vecteurs suivant :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que x est combinaison linéaire des vecteurs de la famille (e_1, e_2, e_3).

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit F une partie **non vide** de l'espace vectoriel E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$ (F est stable pour la loi $+$).
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$ (F est stable pour la loi $\cdot$).

Remarques.

1. Tout sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel.
2. Tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E.

Propriété 2 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si

(1) F est une partie non vide de E.

(2) $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$.

Méthode.

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E, on montre que :

- F est une partie non vide de E (on peut vérifier que $0_E \in F$),
- $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$.

Exemple. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

- $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + 2x_3 = 0 \right\}$

- $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 - x_2 = 0 \ \text{ et } \ x_3 = 0 \right\}$

Théorème 3 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les **combinaisons linéaires** de vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $\mathcal{F}$ et noté $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
C'est le **plus petit sous-espace vectoriel** de E (au sens de l'inclusion) contenant la famille $\mathcal{F}$.

Définition.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dira qu'une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ est une **famille génératrice** de F si

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$

Autrement dit, $(e_1, \dots, e_p)$ est une **famille génératrice** de F si tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille.

Exemple. Déterminer une famille génératrice de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

- $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + 2x_3 = 0 \right\}$

- $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 - x_2 = 0 \ \text{ et } \ x_3 = 0 \right\}$

Propriété 4 (sur les sous-espaces vectoriels engendrés)

(1) Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ (autrement dit si $e_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$), alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

(2) Si $F = \mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_p e_p)$ et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont non nuls, alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Exemple. On considère les vecteurs suivants : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Montrer que : $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, w)$.

Remarque. Un même sous-espace vectoriel peut admettre plusieurs familles génératrices. On ne parle donc jamais de LA famille génératrice mais d'UNE famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

1.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition.

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une **base** d'un espace vectoriel E si, pour tout vecteur $x \in E$, il existe des **uniques** scalaires $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Autrement dit, x se décompose de manière **unique** comme **combinaison linéaire** de vecteurs de $\mathcal{B}$.
Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{B}_4 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Remarque.

- Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une **base** de E, alors c'est en particulier une **famille génératrice** et $E = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
- Un même espace vectoriel peut admettre plusieurs bases. On ne parle donc jamais de LA base mais d'UNE base d'un espace vectoriel.
- Par contre, on retiendra que toutes les bases d'un même espace vectoriel ont le **même nombre** de vecteurs.

Définition.

On appelle **dimension** d'un espace vectoriel E et on note $\dim(E)$ le nombre de vecteurs appartenant à une base quelconque de E.

Théorème 5 (Bases canoniques et dimension des espaces vectoriels de référence)

(1) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on note e_1 et e_2 les vecteurs définis par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
En particulier, $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$.

(2) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs définis par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
En particulier, $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$.

(3) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on note e_1, e_2, e_3 et e_4 les vecteurs définis par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
En particulier, $\dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = 4$.

Méthode.

Pour démontrer qu'une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un espace vectoriel E :

1. On vérifie que la dimension de l'espace vectoriel E est égale au cardinal de la famille, c'est-à-dire au nombre p de vecteurs de la famille.
2. On montre que les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ sont linéairement indépendants.

Exemple.

1. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Décomposer le vecteur $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Méthode.

Pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel F de E :

1. On commence par déterminer une famille génératrice de F.
2. On supprime ensuite les vecteurs "en trop" qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs,
3. On termine en vérifiant que les vecteurs restant sont linéairement indépendants.

Exemple. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

3. En déduire une base puis la dimension de F.

Exemple. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

En déduire $\dim(G)$.

2 Applications linéaires

Dans la suite, E **et** F **désignent deux espaces vectoriels** $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ **et** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**, avec** $p, n \in \{1,2,3,4\}$**.**

2.1 Définitions

Définition.

On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que : pour tous vecteurs $x, y \in E$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on notera simplement $\mathcal{L}(E)$.

Remarques.

1. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.
2. Une application linéaire $f : E \to F$ laisse stable toutes combinaisons linéaires : pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_r \in E$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_r f(x_r).$$

Propriété 6 (Caractérisation des applications linéaires)

Soit $f : E \to F$ une application. f est une **application linéaire** si et seulement si

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Méthode.

Pour montrer que $f : E \to F$ est linéaire, on prouve que pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemple. Démontrer que les applications suivantes sont des applications linéaires :

- $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

- $g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Théorème 7 (Matrice canoniquement associée à une application linéaire)

(1) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

est une application linéaire.

(2) Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que f s'écrive :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Cette matrice M est appelée la **matrice canoniquement associée à** f.

Méthode.

Soit $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application linéaire et $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Pour obtenir les coefficients de la j-ième colonne de la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à f, il suffit de déterminer les coordonnées du vecteur $f(e_j)$:

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & & * \end{pmatrix} \\ f(e_1) \quad \dots \quad f(e_p) \end{array}$$

Exemple.

1. Déterminer les matrices canoniquement associées aux applications linéaires f et g étudiées précédemment.

2. Déterminer l'expression de l'application linéaire $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$ lorsque M est égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Noyau d'une application linéaire

Définition.

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de f le sous-ensemble de E noté $\mathrm{Ker}(f)$ défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \ | \ f(x) = 0_F\}.$$

Théorème 8 (Structure algébrique du noyau)

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$\mathrm{Ker}(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de E.

Preuve.

$\square$

Méthode.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$, on cherche les vecteurs x tels que $f(x) = 0_F$ en résolvant un système linéaire homogène.

Exemple. Déterminer le noyau des applications linaires f et g étudiées précédemment.

Propriété 9 (Caractérisation de l'injectivité par le noyaux)

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$f \text{ est } \textbf{injective} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Preuve.

$\square$

Exemple. Les applications f et g étudiées précédemment sont-elles injectives ?

2.3 Image d'une application linéaire

Définition.

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de f le sous-ensemble de F noté $\mathrm{Im}(f)$ défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \ | \ \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Théorème 10 (Structure algébrique de l'image)

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$\mathrm{Im}(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de F.

Preuve.

$\square$

Propriété 11 (Famille génératrice de l'image)

Soit f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. Autrement dit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p)).$$

Preuve.

$\square$

Méthode.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire $f : E \to F$, on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E (en général la base canonique de E) et on détermine $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$.

Exemple. Déterminer l'image des applications linaires f et g étudiées précédemment.

Propriété 12 (Caractérisation de la surjectivité par l'image)

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$f \text{ est } \textbf{surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$$

Preuve.

□

Exemple. Les applications f et g de étudiées précédemment sont-elles surjectives ? bijectives ?