Chapitre 16

Calcul intégral

Compétences attendues.

- ✓ Calculer une intégrale sur un segment à l'aide d'une primitive.
- ✓ Calculer une intégrale sur un segment par une intégration par parties.
- ✓ Calculer une intégrale sur un segment par un changement de variable.
- ✓ Déterminer la nature et calculer une intégrale impropre en $\pm\infty$ en se ramenant à une intégrale sur un segment.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Intégration sur un segment

1.1 Primitives d'une fonction continue

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que :

- F est dérivable sur I.
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

- $f_1(x) = 3$ et $I = \mathbb{R}$
- $f_2(x) = 2x - 1$ et $I = \mathbb{R}$
- $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $I =]0, +\infty[$
- $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$ et $I =]0, +\infty[$

Théorème 1 (Primitives d'une fonction continue)

(1) Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet une **primitive** F sur I, qui est alors de classe C^1 sur I.

(2) Si une fonction f est **continue** sur un intervalle I et si F est une primitive de f sur I, alors toute **primitive** de f sur I est de la forme $F + k$, où k est une constante réelle.

Remarque. Ainsi, une fonction continue sur un intervalle I n'admet pas qu'une seule primitive sur I. On ne parle donc jamais de LA primitive mais d'UNE primitive d'une fonction.

Propriété 2 (Primitives et opérations)

(1) Soient f et g deux fonctions admettant des primitives F et G sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- λF est une primitive de λf sur I.

(2) Soient f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle J et u une fonction continue et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans J.

Alors $F(u)$ est une primitive de $u' \times f(u)$ sur I.

Preuve.

□

Attention.
On obtient pas une primitive d'un produit fg en faisant le produit des primitives. En effet,

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg.$$

Voici le tableau des primitives usuelles à connaître (que l'on peut déduire de la propriété précédente) :

Fonction $f(x) = ...$	Primitives $F(x) = ...$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^{-1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k,\ k \in \mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ (cas particulier où $\alpha = -\dfrac{1}{2}$)	$2\sqrt{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$

Exemple. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

- $f_1(x) = xe^{3x^2}$ et $I = \mathbb{R}$

- $f_2(x) = \dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}$ et $I = \mathbb{R}$

- $f_3(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$

- $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$ et $I =]2, +\infty[$

1.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et $a, b \in I$.
On appelle **intégrale** de f entre a et b le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ et défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarques.

1. La notion d'intégrale est indépendante de la primitive choisie : si F et G sont deux primitives de f, alors $G = F + k$ pour un $k \in \mathbb{R}$. On a alors :
$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$
2. La lettre x dans l'intégrale est muette. On notera indifféremment $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(u)du$...
3. A partir de la définition de l'intégrale, on obtient immédiatement les formules suivantes :
$$\int_a^b 0dx = 0, \qquad \int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Méthode.

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on détermine une primitive F de f et on utilise la définition de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple. Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \int_1^3 (x^2 + 3x + 1)dx.$

- $J = \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x-1}dx.$

- $K = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)}.$

1.3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 3 (Propriétés de l'intégrale)

(1) **Linéarité de l'intégrale** : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

(2) **Relation de Chasles** : Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b, c \in I$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(3) **Positivité de l'intégrale** : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I.

- Bornes croissantes : Si $a, b \in I$, $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Bornes décroissantes : Si $a, b \in I$, $a \geq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

(4) **Intégration des inégalités** : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.

- Bornes croissantes : Si $a, b \in I$, $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Bornes décroissantes : Si $a, b \in I$, $a \geq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Preuve.

□

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^n+1}dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{2}$. En déduire qu'elle converge.

Propriété 4 (Inégalité triangulaire)

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, avec $a \leq b$, alors on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

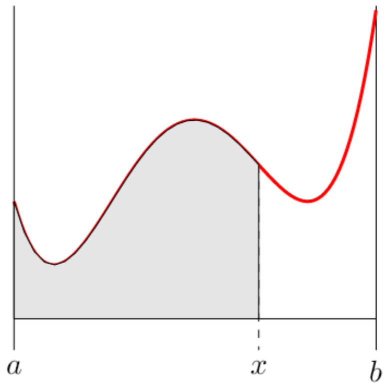
1.4 Interprétation géométrique

Définition.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note $\mathcal{A}_f$ la fonction définie par :

$$\mathcal{A}_f : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \text{l'aire de la surface délimitée par } \mathcal{C}_f \text{ et l'axe} \\ & & \text{des abscisses entre les abscisses } a \text{ et } x \end{cases}$$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentée en rouge et $\mathcal{A}_f(x)$ est l'aire de la surface représentée en grise sur l'exemple ci-contre.



Propriété 5 (de la fonction $\mathcal{A}_f$)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **positive** sur $[a,b]$. Alors la fonction $\mathcal{A}_f$ est **dérivable** sur $[a,b]$ et vérifie :

$$\forall x \in [a,b],\ \mathcal{A}_f'(x) = f(x).$$

Autrement dit, $\mathcal{A}_f$ est une **primitive** de f (c'est la primitive de f qui s'annule en a).

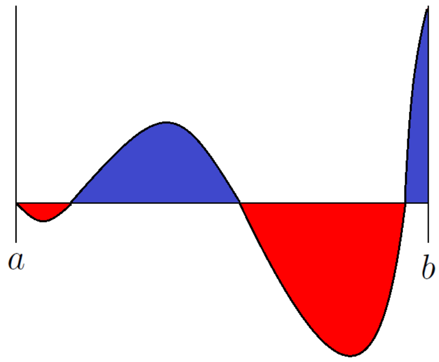
Preuve.

□

Interprétation géométrique de l'intégrale.

On peut maintenant donner une interprétation géométrique de $\int_a^b f(x)dx$ (où f continue sur $[a,b]$ et $a \leq b$) :

- Si f est positive sur $[a,b]$: Comme $\mathcal{A}_f$ est une primitive de f,
$$\int_a^b f(x)dx = [\mathcal{A}_f(x)]_a^b = \mathcal{A}_f(b) - \underbrace{\mathcal{A}_f(a)}_{=0} = \mathcal{A}_f(b) = \text{l'aire sous la courbe } \mathcal{C}_f \text{ entre } a \text{ et } b.$$
- Si f est négative sur $[a,b]$: Avec le théorème 3, on sait que
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx.$$
On est ainsi ramené à une fonction $-f$ positive et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{-f}$ est comptabilisée négativement.
- Si f n'est pas de signe constant sur $[a,b]$: Il suffit alors de se ramener à une fonction de signe constant en utilisant la relation de Chasles.



On obtient ainsi l'aire algébrique sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b : $\int_a^b f(x)dx =$ aire bleue $-$ aire rouge.

1.5 Techniques de calcul d'intégrales

Intégration par parties

Théorème 6 (Intégration par parties)

Soients u et v deux fonctions de **classe** C^1 sur $[a,b]$. Alors :
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Preuve.

□

Méthode.

L'intérêt de l'intégration par parties est de passer de l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ à l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ si cette dernière est plus simple à calculer que la première. Pour effectuer une intégration par parties,

- on écrit la fonction dont on doit calculer l'intégrale sous la forme d'un produit de deux fonctions,
- on décide quelle fonction on dérive et quelle fonction on intègre,
- on applique la formule de l'intégration par parties à ces deux fonctions.

Exemple. Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \int_0^1 xe^x dx.$

- $J = \int_1^e x\ln(x)dx.$

Changement de variable

Théorème 7 (Changement de variable)

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et φ une fonction de **classe** C^1 sur $[a,b]$, telle que $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Preuve.

$\square$

Méthode.

Pour faire un changement de variable $t = \varphi(x)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (avec φ de classe C^1 sur $[a, b]$),

- on change les bornes de l'intégrale : lorsque $x = a$, $t = \varphi(a)$ et lorsque $x = b$, $t = \varphi(b)$,
- on exprime $f(x)$ uniquement en fonction de t,
- à partir de l'égalité $dt = \varphi'(x)dx$, on exprime dx uniquement en fonction de t et de dt,
- on applique la formule du changement de variable : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$.

Exemple. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

- $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ (poser $t = \sqrt{x}$)

- $J = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}}dx$ (poser $t = 1 + e^x$)

2 Intégrales impropres

2.1 Intégrale impropre d'une fonction continue

Définition.

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est **impropre** ou **généralisée** en $+\infty$.
- L'**intégrale impropre** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **converge** si $\displaystyle\int_a^{A} f(x)dx$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$ et on a alors :
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)dx.$$
- Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**.

On peut définir de la même façon l'intégrale impropre d'une fonction en $-\infty$.

Exemple. Vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

- $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

- $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Définition.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est **impropre** ou **généralisée** en $-\infty$ et en $+\infty$,
- L'**intégrale impropre** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **converge** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ sont **toutes les deux convergentes**. Et dans ce cas,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$
- Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ou $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**.

Exemple. Vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

- $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx.$

- $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx.$

2.2 Propriétés des intégrales impropres

Théorème 8 (Propriétés de l'intégrale)

(1) **Linéarité de l'intégrale** : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergent, alors :

(a) Pour tout réel λ, l'intégrale $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))dx$ converge.

(b) De plus, on a :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

(2) **Relation de Chasles** : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors :

(a) Pour tous $b, c \in [a, +\infty[$, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ converge.

(b) Dans ce cas, on a :

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_b^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

(3) **Positivité de l'intégrale** : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge et que, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 0$. Alors :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0.$$

(4) **Intégration des inégalités** : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergent et que, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Attention.

Il est possible que l'intégrale $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))dx$ converge alors que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ divergent. **On ne peut donc pas scinder une intégrale impropre en deux sans avoir vérifié au préalable que les deux intégrales obtenues convergent.**

Exemple.

1. Vérifier que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ converge et déterminer sa valeur.

3. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ convergent-elles ?

   A-t-on $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$?

Définition.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge.

Théorème 9 (Convergence absolue)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est **absolument convergente**. Alors :

(1) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

En d'autres termes, la **convergence absolue** implique la **convergence**.

(2) On a l'inégalité triangulaire suivante :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Remarque. Toutes ces propriétés restent valables pour des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

2.3 Techniques de calcul des intégrales impropres

Méthode.
On ne procède pas à une intégration par parties ou à un changement de variable directement sur une intégrale impropre. On se ramène à une intégrale définie sur un segment et on passe ensuite à la limite.

Intégration par parties

Exemple.

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ converge et donner sa valeur.

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$ converge et donner sa valeur.

Changement de variable

Exemple.

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$ converge et donner sa valeur. On pourra effectuer le changement de variable $t = e^x$.

- Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{x^{n+2}} dx$. Calculer la valeur de l'intégrale I_n (on pourra effectuer le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$). En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Propriété 10 (Intégrales impropres et parité)

(1) **Fonctions paires** : Si f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ converge et on a dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

(2) **Fonctions impaires** : Si f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ converge et on a dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

Preuve.

□