Chapitre 17

Espaces probabilisés et variables aléatoires discrètes infinies

Compétences attendues.

✓ Appliquer la formule des probabilités totales dans le cas infini.

✓ Vérifier qu'une suite de réelles est une loi de probabilité.

✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète à partir de sa loi et réciproquement.

✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Espaces probabilisables

1.1 Tribu des événements

Dans le cas où l'univers Ω est fini, l'ensemble des événements est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Mais dans le cas où Ω est infini (et non dénombrable), il n'est pas possible de considérer toutes les parties de Ω comme des événements, car cela ne permet pas de définir correctement une probabilité.

Pour construire un espace probabilisable dans le cas générale, on impose que l'ensemble des événements associés à une expérience aléatoire forme une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, appelée **tribu**, qui vérifie certaines propriétés de stabilité indispensables. Plus précisément :

Définition.

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** de Ω si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable : si I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Remarque. On peut déduire de cette définition que, si $\mathcal{A}$ une tribu de Ω, alors :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : si I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Définition.

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de Ω. On dit alors que :

- Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**.
- Ω est l'univers, les éléments de la tribu $\mathcal{A}$ sont les **événements**.

Remarque. En pratique, lorsque Ω est un **univers fini ou dénombrable**, nous choisirons toujours pour **tribu des événements l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω**.

1.2 Opérations sur les événements

La définition de l'événement contraire $\overline{A}$ d'un événement A est la même que dans le cas fini. Pour l'intersection et l'union, il existe une généralisation au cas infini :

Définition.

Soit I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'événements tous définis sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- L'événement $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ est réalisé si et seulement si **pour tout** $i \in I$, A_i est réalisé. Autrement dit :
$$\omega \in \bigcap_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I,\ \omega \in A_i.$$
- L'événement $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est réalisé si et seulement si il existe **au moins un** $i \in I$ pour lequel A_i est réalisé. Autrement dit :
$$\omega \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I,\ \omega \in A_i.$$

Propriété 1 (Opérations sur les événements)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

(1) L'intersection et l'union sont **commutatives** et **associatives**.

(2) L'intersection et l'union sont **distributives**. Plus précisément, si I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$, $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, alors :

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) \quad \text{et} \quad B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i).$$

(3) Si I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{(Lois de Morgan)}$$

Exemple. Écrire à l'aide des opérations ensemblistes usuelles (l'union, l'intersection et le complémentaire) et à l'aide des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ les événements suivants :

1. Tous les événements A_n se réalisent.

2. Au moins un des événements A_n se réalise.

3. Tous les événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang $p \geq 1$.

4. Tous les événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang.

5. Aucun des événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang.

2 Espaces probabilisés

2.1 Définitions

Définition.

On dit qu'une application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une **probabilité** sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ si elle vérifie les conditions suivantes :

- $P(\Omega) = 1$.
- Si I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'événements **deux à deux incompatibles** (c'est-à-dire telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$), alors on a :

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Lorsqu'une telle application existe, on dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Notation. Dans toute la suite du chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **désignera un espace probabilisé**.

Remarque. Toutes les propriétés d'une probabilité vu au chapitre 11 restent valables dans le cas où l'univers est infini.

2.2 Quasi-certitude et quasi-impossibilité

Définition.

- Un événement A, différent de Ω et de probabilité égale à 1, est dit **quasi-certain**. On dit aussi que la réalisation de A est **presque sûre**.
- Un événement A, non vide et de probabilité nulle, est dit **quasi-impossible** ou **négligeable**.

Remarque. Le contraire d'un événement quasi-certain est un événement quasi-impossible. Le contraire d'un événement quasi-impossible est un événement quasi-certain.

Exemple. On effectue une succession de tirs sur une cible jusqu'à l'atteindre. A chaque tire, la probabilité d'atteindre une cible est $\dfrac{1}{5}$.

1. Notons A_n l'événement "on atteint la cible au n-ième tir pour la première fois". Déterminer $P(A_n)$.

2. En déduire qu'on est presque sûr d'atteindre la cible en un nombre fini de tirs.

2.3 Conditionnement

Toutes les définitions et propriétés sur les probabilités conditionnelles vues dans le cas d'un univers fini restent vraies dans le cas infini. Il y a en plus une généralisation du théorème des probabilités totales :

Définition.

On appelle **système complet d'événements** toute famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$, où I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$, telle que :

- Les événements A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall i, j \in I,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Théorème 2 (Formule des probabilités totales)

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement dont on cherche à calculer sa probabilité. Lorsqu'on ressent un manque d'information pour obtenir $P(B)$ directement, on utilisera la démarche suivante :

(1) On **introduit un système complet d'événements** $(A_i)_{i\in I}$ bien choisi pour lever le manque d'information sur l'événement B (avec I une partie finie ou non de $\mathbb{N}$).

(2) On **décompose l'événement** B **sur le système complet d'événements** $(A_i)_{i\in I}$:

$$B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$$

(3) Comme c'est une **union d'événements deux à deux incompatibles**, on obtient :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B).$$

(4) De plus, si pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$, alors avec la **formule des probabilités composées**, on obtient :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Exemple. On lance une pièce équilibré jusqu'à obtenir pour la première fois un pile et on note n le nombre de lancers effectués. On considère alors une urne composée de 2^n boules dont une seule blanche et on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

2.4 Indépendance

Les définitions et propriétés sur l'indépendance vues dans le cas d'un univers fini se généralisent au cas infini :

Définition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements, avec I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$.
On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie finie $J \subset I$,

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Remarque. La plupart du temps, l'indépendance mutuelle se déduit de la situation. Des événements sont mutuellement indépendants lorsque la réalisation de l'un ne donne pas d'information sur la réalisation des autres.

Attention.

Il ne faut surtout pas confondre **incompatibilité** et **indépendance** :

1. L'**incompatibilité** est une notion intrinsèque aux événements (ne dépend pas de la probabilité P). On retiendra que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements **deux à deux incompatibles**, alors :
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$
2. L'**indépendance** est une notion qui dépend de la probabilité P. On retiendra que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants**, alors :
$$P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right) = \prod_{i=0}^{n} P(A_i).$$

Propriété 3 (Indépendance mutuelle d'événements)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**, avec I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$.

(1) Pour tout $i \in I$, notons B_i l'événement égale soit à A_i soit à $\overline{A_i}$. Alors $(B_i)_{i\in I}$ est aussi une famille d'événements **mutuellement indépendants**.

(2) Tout événement formé avec certains événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est **indépendant** de tout événement formé à partir d'autres événements de $(A_i)_{i\in I}$.

2.5 Théorème de la limite monotone

Théorème 4 (de la limite monotone)

(1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite croissante d'événements** (c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors on a :
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

(2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite décroissante d'événements** (c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$), alors on a :
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Exemple. Une épreuve consiste à lancer une infinité de fois un dé équilibré.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_n "on obtient au moins un 6 lors des n premiers lancers". Déterminer $P(A_n)$.

2. Que peut-on dire de la suite d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$?

3. En déduire la probabilité de l'événement A "on obtient au moins un 6".

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de la limite monotone :

Théorème 5 (Conséquence du théorème de la limite monotone)

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right).$$

Exemple. On effectue des tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche. A chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute une boule noire. L'expérience consiste à effectuer des tirages successifs jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire.

1. On note A_i l'événement "on obtient une boule blanche au i-ième tirage". Déterminer $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$.

2. En déduire la probabilité de l'événement A : "on obtient une boule noire".

3 Variables aléatoires discrètes infinies

3.1 Définitions

Définition.

- Une **variable aléatoire** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array} \right.$$

telle que, pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ est un événement lié à l'expérience aléatoire, c'est-à-dire qu'il appartient à $\mathcal{A}$.

- Le **support** d'une variable aléatoire X, noté $X(\Omega)$, est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Une **variable aléatoire** X est **discrète** si son support $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Si $X(\Omega)$ est finie, on dit que X est une **variable aléatoire discrète finie**. Si $X(\Omega)$ est infinie, on dit que X est une **variable aléatoire discrète infinie**.

Remarque. Les variables aléatoires discrètes finies ont été étudiées au chapitre 13. Nous nous intéressons ici aux variables aléatoires discrètes infinies.

Propriété 6 (Opérations sur les variables aléatoires discrètes infinies)

(1) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et λ un nombre réel.

Alors $X+Y$, λX, XY, $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ sont aussi des variables aléatoires discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(2) Soient X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction. Alors l'application

$$f(X) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on dit que c'est la **transformée** de la variable aléatoire X par f.

3.2 Loi d'une variable aléatoire discrète infinie

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
On appelle **loi de probabilité** de X l'ensemble

$$\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

où $p_k = P(X = x_k)$.

Méthode.
Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète infinie X, c'est trouver $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ puis donner pour tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de $P(X = x_k)$.

Exemple.

1. Une pièce de monnaie amène pile avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$. On effectue une série infinie de lancers et on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier pile. Déterminer la loi de X.

2. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirage au hasard dans l'urne. A chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée. On procède ainsi jusqu'à l'obtention pour la première fois de la boule blanche et on note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de celle-ci. Déterminer la loi de Y.

Propriété 7 (Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète)

Soit X est une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Alors :

(1) $(X = x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

(2) En particulier, la série $\sum_{k\geq 0} p_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Remarques.

1. A partir d'une variable aléatoire X, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associé à X.
2. L'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ permet de vérifier s'il n'y a pas d'erreur dans la loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ de X.

Exemple. On considère toujours X et Y les variables aléatoires de l'exemple précédent.

1. Vérifier que $\sum_{k\geq 0} P(X = x_k)$ converge et que sa somme vaut 1.
2. Vérifier que $\sum_{k\geq 0} P(Y = y_k)$ converge et que sa somme vaut 1.

Propriété 8 (Loi de probabilité)

Un ensemble $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est une **loi de probabilité** (c'est-à-dire qu'il existe X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$) si et seulement si :

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k \geq 0$,

(2) La série $\sum_{k\geq 0} p_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

3.3 Fonction de répartition

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$.
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} p_k.$$

Exemple. Reprenons les variables aléatoires X et Y de la section précédente. Déterminer les fonctions de répartition F_X et F_Y de X et de Y.

Théorème 9 (Propriétés de la fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ et les x_k sont indexés de façon croissante. Soit F_X la fonction de répartition de X. Alors :

(1) Pour tout réel x, $F_X(x) \in [0, 1]$.

(2) F_X est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

(3) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

(4) F_X **déterminer entièrement la loi** de X :

$$p_0 = P(X = x_0) = F_X(x_0) \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

4 Moments d'une variable aléatoire discrète infinie

4.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$.
On dit que X admet une **espérance** si la série $\sum_{k \geq 0} x_k p_k$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, l'**espérance** de X est le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k p_k.$$

Interprétation de l'espérance. Lorsqu'elle existe, l'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs x_k prises par la variable aléatoire X pondérées par les probabilités $p_k = P(X = x_k)$ avec lesquelles X prend ses valeurs. C'est une généralisation de la notion de moyenne. En particulier,

- Si X est positive, c'est-à-dire si $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $E(X) \geq 0$.
- Si $X \leq Y$, c'est-à-dire si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Exemple. On considère toujours les variables aléatoires X et Y définies à la section précédente. Déterminer si elles admettent une espérance et la calculer si c'est le cas.

Propriété 10 (Linéarité de l'espérance)

(1) Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **admettant une espérance** et a et b deux réels. Alors la variable aléatoire $aX+b$ **admet une espérance** et

$$E(aX+b) = aE(X)+b.$$

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, chacune **admettant une espérance**. Alors la variable aléatoire $X+Y$ **admet une espérance** et

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y).$$

Théorème 11 (de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ et f une fonction. La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} f(x_k)p_k$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{k \in I} f(x_k)p_k.$$

4.2 Variance d'une variable aléatoire discrète infinie

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $r \in \mathbb{N}$.
Si la variable aléatoire X^r possède une espérance $E(X^r)$, c'est-à-dire si la série $\sum_{k \geq 0} x_k^r p_k$ converge absolument, alors on dit que X admet un **moment d'ordre** r et on a :

$$E(X^r) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^r p_k.$$

Propriété 12 (Moments d'une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) Si X admet un moment d'ordre r, alors elle admet un moment de tout ordre $s \leq r$.

(2) En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X est une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$.

- Si X admet une **espérance** et si $(X - E(X))$ admet un **moment d'ordre** 2, alors on dit que X admet une **variance** notée $V(X)$ et définie par :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k - E(X))^2 p_k.$$

- Comme $(X-E(X))^2 \geq 0$, on a par positivité de l'espérance $V(X) \geq 0$. On peut alors définir l'**écart type** de X noté $\sigma(X)$ égal à la racine carrée de la variance $\sqrt{V(X)}$.

Interprétation de la variance. La variance d'une variable aléatoire discrète X mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à $E(X)$. En particulier,

- Si X est une variable aléatoire constante, $V(X) = 0$.
- Si $V(X) = 0$, X est presque sûrement constante égale à $E(X)$.

Théorème 13 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
X admet une **variance** si et seulement si X admet un **moment d'ordre** 2, et dans ce cas on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Méthode.

Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens pour calculer une variance et non la définition de base qui entraîne des calculs compliqués.

Exemple. On considère toujours les variables aléatoires X et Y définies à la section 3.2. Déterminer si X et Y admettent une variance et la calculer si c'est le cas.

Propriété 14 (de la variance)

Soit X est une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **admettant une variance** et a, b deux réels. Alors la variable aléatoire $aX + b$ **admet une variance** et :

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

4.3 Variables aléatoires centrées réduites

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Si X admet une espérance et si $E(X) = 0$, alors X est dite **centrée**.
- Si X admet une variance et si $V(X) = 1$, alors X est dite **réduite**.
- Si X admet une espérance nulle et une variance égale à 1, alors X est dite **centrée réduite**.

Propriété 15 (Variables aléatoires centrées réduites)

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) Si X admet une espérance, alors la variable aléatoire $X - E(X)$ est **centrée**.
On dit que c'est **la variable aléatoire centrée associée à** X.

(2) Si X admet une espérance et une variance et si $V(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire X^* définie par

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

est une variable aléatoire **centrée réduite**.
On dit que X^* est **la variable aléatoire centrée réduite associée à** X.

5 Variables aléatoires discrètes indépendantes

5.1 Cas $n = 2$

Définition.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** si pour tout $(x_k, y_l) \in X(\Omega)$, on a :

$$P((X = x_k) \cap (Y = y_l)) = P(X = x_k)P(Y = y_l),$$

c'est-à-dire que les événements $(X = x_k)$ et $(Y = y_l)$ sont **indépendants**.

Propriété 16 (Variables aléatoires discrètes indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes infinies **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, alors

$$P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I)P(Y \in J).$$

(2) Si f et g sont deux fonctions, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables discrètes infinies **indépendantes**.

5.2 Cas général

Définition.

Soient n variables aléatoires discrètes infinies $X_1, \dots, X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_1, \dots x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k),$$

c'est-à-dire que les événements $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), \dots, (X_n = x_n)$ sont **mutuellement indépendantes**.

Propriété 17 (Variables aléatoires finies mutuellement indépendantes)

Soient n variables aléatoires discrètes infinies $X_1, \dots, X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui sont **mutuellement indépendantes**.

(1) Pour tous intervalles $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$, les événements $(X_1 \in I_1), \dots, (X_n \in I_n)$ sont **mutuellement indépendants** :

$$P((X_1 \in I_1) \cap \dots \cap (X_n \in I_n)) = P(X_1 \in I_1) \times \dots \times P(X_n \in I_n).$$

(2) Si $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions, alors $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont n variables aléatoires discrètes infinies **mutuellement indépendantes**.

(3) Si Y est une variable aléatoire discrète infinie ne dépendant que de $X_1, \dots, X_p$ et si Z est une variable aléatoire discrète infinie ne dépendant que de $X_{p+1}, \dots, X_n$, alors Y et Z sont **indépendantes**.