Chapitre 18

Lois discrètes usuelles

Compétences attendues.

✓ Reconnaitre une loi discrète usuelle à partir d'une expérience aléatoire.

✓ Connaitre les différentes caractéristiques des lois discrètes usuelles (support, probabilités, espérance et variance).

✓ Savoir retrouver l'expression de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant une loi discrète usuelle.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **désignera un espace probabilisé**.

1 Lois discrètes finies

1.1 Loi certaine

Définition.

- Une variable aléatoire X est **certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur a. On a alors $P(X = a) = 1$.
- Une variable aléatoire X est **quasi-certaine** s'il existe $a \in X(\Omega)$ tel que $P(X = a) = 1$.

Exemple.

- Un sac contient n jetons portant tous le numéro 3. On pioche un jeton au hasard et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Alors X suit la loi certaine de support $X(\Omega) = \{3\}$.
- On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si pile apparaît au moins une fois, 0 sinon. Alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 0) = 0$ et $P(X = 1) = 1$. Donc X est quasi-certaine.

Propriété 1 (Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine ou quasi-certaine)

(1) Si X est une **variable aléatoire certaine** telle que $X(\Omega) = \{a\}$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

(2) Si X est une **variable aléatoire quasi-certaine** telle que $P(X = a) = 1$ pour un $a \in X(\Omega)$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

(3) Si X est une variable aléatoire discrète de **variance nulle**, alors X est **quasi-certaine** et **presque sûrement** égale à $E(X)$.

1.2 Loi uniforme

Situation type. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en prend une au hasard, et on note X la variable aléatoire égale au numéro tiré. Déterminer la loi de X.

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ si :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ si X suit une loi uniforme.

Méthode.

La loi uniforme est la loi de l'équiprobabilité.

Propriété 2 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Preuve.

□

On peut généraliser la notion de loi uniforme à un intervalle $[\![a, b]\!]$ quelconque :

Définition.

Soient a et b deux entiers tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, si :

$$X(\Omega) = [\![a, b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a, b]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Propriété 3 (Loi uniforme sur un intervalle entier quelconque)

Soient a et b deux entiers tels que $a < b$.

(1) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ si et seulement si $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b - a + 1]\!])$.

(2) Soit X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b - a)(b - a + 2)}{12}.$$

Preuve.

□

1.3 Loi de Bernoulli

Situation type. Considérons le lancer d'une pièce amenant pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et désignons par X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient pile et 0 sinon. Déterminer la loi de X.

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Méthode.

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli si c'est l'indicatrice de l'événement "obtenir un succès" lors d'une seule épreuve à deux issues (succès et échec) : elle prend deux valeurs 0 (échec) et 1 (succès) et le paramètre de la loi est $P(X = 1)$.

Propriété 4 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0,1[$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Preuve.

$\square$

1.4 Loi binomiale

Situation type. Une pièce de monnaie amène pile avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$. On effectue une série de n lancers et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de piles obtenus. Déterminer la loi de X.

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$ si :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Méthode.

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si elle représente le nombre de succès obtenus au cours de n épreuves **indépendantes**, chacune ayant deux issues possibles, le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$.

Propriété 5 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.
Soit X une variable aléatoire suivant une **loi binomiale** de paramètres n et p. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Preuve.

□

2 Lois discrètes infinies

2.1 Loi géométrique

Situation type. Une pièce de monnaie amène pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On effectue une série infinie de lancers et on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier pile. Déterminer la loi de X.

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = (1-p)^{k-1}p.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si X suit une loi géométrique de paramètre p.

Méthode.

Une variable aléatoire suit une loi géométrique si elle représente le temps d'attente du premier succès lors de la répétition d'épreuves indépendantes à deux issues (succès avec la probabilité p, échec de probabilité $1-p$).

Propriété 6 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Preuve.

□

2.2 Loi de Poisson

La loi de Poisson ne correspond à aucune situation type. Elle apparait comme la limite d'une certaine suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale (voir le TP27).

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Propriété 7 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi de Poison** de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Preuve.

□

3 Tableau des lois discrètes usuelles

	Dénomination	Notation	Paramètres	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme	$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$n \in \mathbb{N}^*$	$[\![1,n]\!]$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
		$\mathcal{U}([\![a,b]\!])$	$a,b \in \mathbb{N}^*,\ a \leq b$	$[\![a,b]\!]$	$P(X=k)=\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
	Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^*,\ p \in]0,1[$	$[\![0,n]\!]$	$P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ