Chapitre 19

Variables aléatoires à densité

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité.
- ✓ Déterminer une densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition et réciproquement.
- ✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Y = g(X)$.
- ✓ Prouver qu'une variable aléatoire X est à densité.
- ✓ Prouver l'existence et calculer une espérance ou une variance d'une variable à densité.
- ✓ Connaître une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance des lois usuelles.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1 Généralités sur les variables aléatoires

1.1 Définition

Définition.

Une **variable aléatoire** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (X \leq x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

L'ensemble des valeurs que peut prendre X est appelé le **support** de X et est noté $X(\Omega)$.

Remarque. Si X est une variable aléatoire, alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$.
En particulier, les ensembles suivants sont des événements : $(X \leq x)$, $(X \geq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$, $(X = x)$, $(x \leq X \leq y)$, $(x \leq X < y)$, $(x < X \leq y)$, $(x < X < y)$.

Propriété 1 (Opérations sur les variables aléatoires)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et λ un nombre réel.
Alors $X + Y$, λX, XY, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ sont aussi des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La **fonction de répartition** de X est la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x).$$

La donnée de la **fonction de répartition** d'une variable aléatoire caractérise sa loi.

Propriété 2 (de la fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On a :

$$P(X > x) = 1 - F_X(x) \qquad \text{et} \qquad P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x).$$

Preuve.

$\square$

Théorème 3 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. Alors :

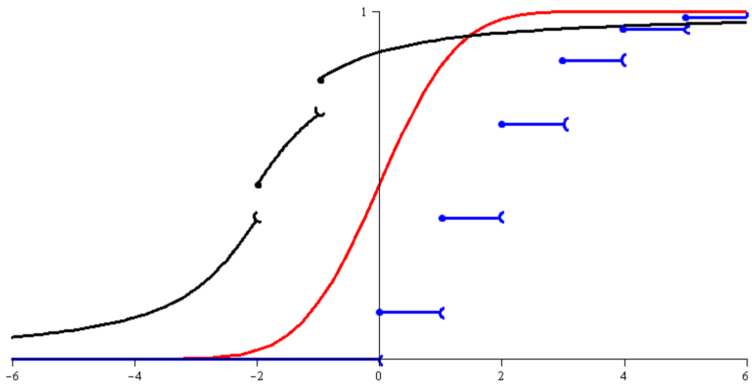
(1) F_X est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

(3) F_X est **continue à droite** en tout point de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, toute fonction F vérifiant ces trois propriétés est une fonction de répartition, c'est-à-dire qu'il existe X une variable aléatoire dont F est la fonction de répartition.

Exemple. Les trois applications suivantes sont des fonctions de répartition de variables aléatoires :



En effet, elles sont toutes les trois croissantes, continues à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et elles sont bien de limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$.

Propriété 4 (Continuité à gauche d'une fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. Alors :

(1) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - \lim_{t\to x^-} F_X(t).$$

(2) F_X est continue à gauche (et donc continue) en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $P(X = x) = 0$.

2 Variables aléatoires à densité

2.1 Définition

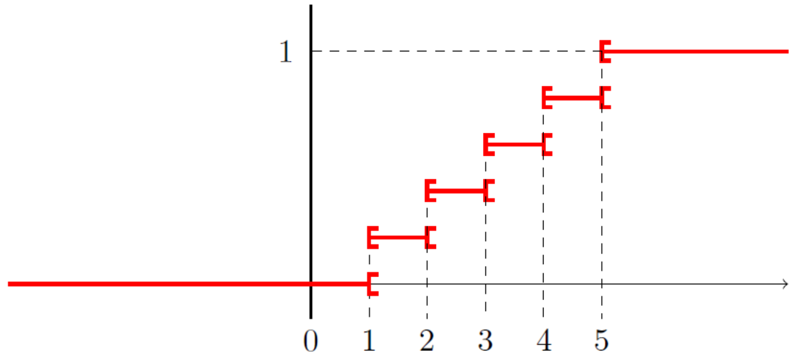
Définition.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si :

- F_X est **continue** sur $\mathbb{R}$.
- F_X est de **classe** C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Remarque. Une variable aléatoire discrète X n'est pas une variable aléatoire à densité. En effet, F_X est alors une fonction en escalier : elle est constante entre deux valeurs successives de $X(\Omega)$ et discontinue en tous les points de $X(\Omega)$.

Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 5]\!])$, F_X est discontinue en $1, 2, 3, 4$ et 5 et donc X n'est pas une variable aléatoire à densité :



Méthode.
Pour montrer qu'une variable aléatoire est à densité, on vérifie que sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable aléatoire est à densité.

2.2 Densité de probabilité

Définition.

Soit X est une variable à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On appelle **densité de probabilité de** X toute fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f_X est positive sur $\mathbb{R}$;
- $f_X(x) = F'_X(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Remarque. Une densité d'une variable aléatoire n'est pas unique : si f_X est une densité de X et si l'on change la valeur de f en un nombre fini de points (en prenant pour nouvelles valeurs des réels positifs), alors on obtient une autre densité de X. On parlera donc pour f_X d'**UNE** densité de X et non de **LA** densité de X.

Méthode.

Étant donnée la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire à densité X, on détermine une densité f_X de X en dérivant F_X.

Exemple. Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer une densité f_X de X.

Théorème 5 (Propriétés d'une densité)

Une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **densité** d'une variable aléatoire X si et seulement si :

(1) f_X est **continue** sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

(2) f_X est à **valeurs positives** sur $\mathbb{R}$;

(3) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ **converge et vaut** 1.

Méthode.

Pour montrer qu'une fonction f est une densité, on vérifie que :

- f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- f est à valeurs positives.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut à 1.

Exemple. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est une densité.

2.3 Calcul de probabilités

Théorème 6 (Densité et fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, f_X une densité de X et F_X sa fonction de répartition. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

En particulier, la donnée d'**une densité caractérise la loi** : si X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f_X et f_Y, alors elles ont même loi si et seulement si $f_X = f_Y$ sauf en un nombre fini de points.

Méthode.

Étant donnée une densité f_X d'une variable aléatoire à densité X, on détermine la fonction de répartition F_X de X en intégrant f_X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Exemple. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Propriété 7 (d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et F_X sa fonction de répartition.

(1) Pour tout réel x, $P(X = x) = 0$.

(2) Pour tous réels $x < y$,

$$P(x \leq X \leq y) = P(x < X \leq y) = P(x \leq X < y) = P(x < X < y)$$

On a ainsi la formule :

$$P(x \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(x) = \int_x^y f_X(t)dt.$$

En particulier, cette probabilité s'interprète comme l'aire sous la courbe représentative de la densité f_X entre x et y.

Attention.

Ces propriétés sont uniquement vraies dans le cas où X est une variable à densité. Elles sont bien évidement fausses lorsque X est une variable aléatoire discrète.

Exemple. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $P\left(X \geq \dfrac{1}{2}\right)$, $P\left(X \leq \dfrac{1}{2}\right)$ et $P\left(-2 \leq X \leq \dfrac{1}{3}\right)$.

2.4 Transformée d'une variable aléatoire à densité

Propriété 8 (Transformée d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors l'application

$$g(X) : \begin{cases} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{cases}$$

est encore une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on dit que c'est la **transformée** de la variable aléatoire X par g.

Exemple. Si X est une variable aléatoire, alors $aX + b$, X^2, $|X|$, e^X, ... sont des variables aléatoires.

Question. Si X est à densité, est-ce que $g(X)$ est encore à densité ?

Méthode.

Pour montrer que $Y = g(X)$ est une variable aléatoire à densité, on procède de la manière suivante :

- On cherche la fonction de répartition F_Y de Y (qui s'exprimera en fonction de celle de X).
- On étudie la continuité de F_Y sur $\mathbb{R}$ et son caractère C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- On dérive F_Y aux points où c'est possible pour obtenir une densité de Y.

Exemple. Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de X.
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$, on pose $Y = aX + b$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

2. Déterminer une densité de Y en fonction de f_X.

3 Moments d'une variable aléatoire à densité

3.1 Espérance d'une variable aléatoire à densité

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f_X.
On dit que X admet une **espérance** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ converge absolument.
Dans ce cas, on appelle **espérance de** X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\ dx.$$

Remarque. Puisque $x \mapsto x f_X(x)$ est de signe constant sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, on a l'équivalence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \text{ converge absolument} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \text{ converge}$$

Ainsi, pour montrer que X admet une espérance, il suffit de montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$.

Exemple. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Propriété 9 (de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors :

(1) Pour tous réels a, b,
$$E(aX+b) = aE(X) + b.$$

(2) Si $X+Y$ est une variable à densité alors elle admet une espérance et on a :
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Théorème 10 (de transfert)

Si X est une variable aléatoire admettant une densité f_X et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$ est absolument convergente, et dans ce cas :
$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

3.2 Variance d'une variable aléatoire à densité

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et $r \in \mathbb{N}^*$.
Si la variable aléatoire X^r admet une espérance, c'est-à-dire si l'intégrale impropre
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx$$
converge absolument, alors on dit que X admet un **moment d'ordre** r égale à $E(X^r)$.

Propriété 11 (Moments d'une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) Si X admet un moment d'ordre r, alors elle admet un moment de tout ordre $s \leq r$.

(2) En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de X.

- Si X admet une **espérance** et si $(X - E(X))$ admet un **moment d'ordre** 2, alors on dit que X admet une **variance** notée $V(X)$ et définie par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx.$$

- Comme $V(X) \geq 0$, on peut alors définir le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ appelé l'**écart-type** de X.

Théorème 12 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance.
Alors X admet une **variance** si et seulement si X admet un **moment d'ordre** 2, et dans ce cas :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que X admet une variance et la calculer.

Propriété 13 (de la variance)

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Pour finir, on rappelle les définitions et propriétés suivantes, déjà vu dans le cas discret :

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité.

- Si X admet une espérance et si $E(X) = 0$, alors X est dite **centrée**.
- Si X admet une variance et si $V(X) = 1$, alors X est dite **réduite**.
- Si X admet une espérance nulle et une variance égale à 1, alors X est dite **centrée réduite**.

Propriété 14 (Variables aléatoires centrées réduites)

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors on a :

(1) $X - E(X)$ est **centrée** ;

(2) $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est **centrée réduite**.

On dit que X^* est la **variable aléatoire centrée réduite** associée à X.

4 Lois à densité usuelles

4.1 Loi uniforme

Définition.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** $\mathcal{U}([a, b])$ si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ si X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$.

Exemple. Vérifier que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ est une densité.

Propriété 15 (Fonction de répartition de la loi uniforme)

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire qui suit la **loi uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ est la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } b < x. \end{cases}$$

Preuve.

□

Propriété 16 (Espérance et variance de la loi uniforme)

Si X est une variable aléatoire suivant la **loi uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$, alors X possède une espérance et une variance donnée par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Preuve.

□

4.2 Loi exponentielle

Définition.

Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ.

Exemple. Vérifier que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$ est une densité.

Propriété 17 (Fonction de répartition de la loi exponentielle)

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire qui suit **la loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$) est la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Preuve.

□

Propriété 18 (Espérance et variance de la loi exponentielle)

Si X est une variable aléatoire suivant une **loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$), alors X possède une espérance et une variance donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve.

□

4.3 Loi normale centrée réduite

Définition.

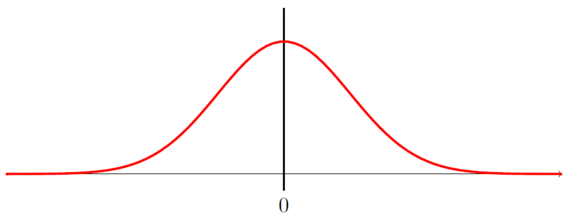
Une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si X a pour densité la fonction φ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ si X suit la **loi normale centrée réduite**.

Remarques.

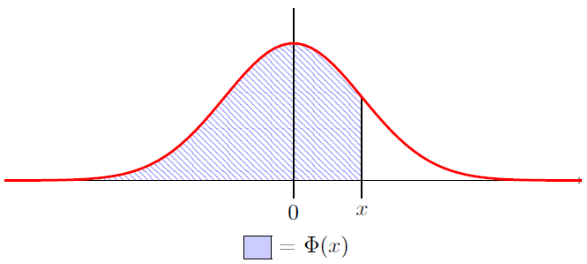
1. φ est bien une densité : φ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ (résultat admis).
2. La fonction φ est paire, son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :

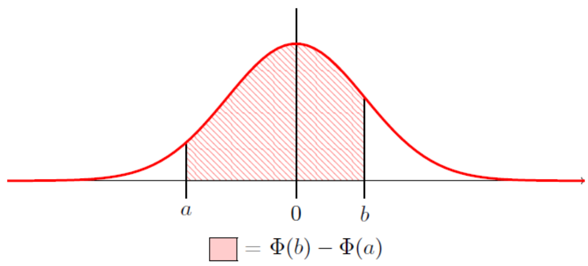


3. On note Φ la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

On représente graphiquement $\Phi(x)$ comme l'aire sous la courbe de Φ entre $-\infty$ et x :





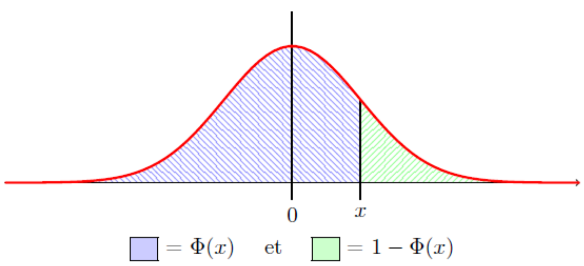
Propriété 19 (de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite)

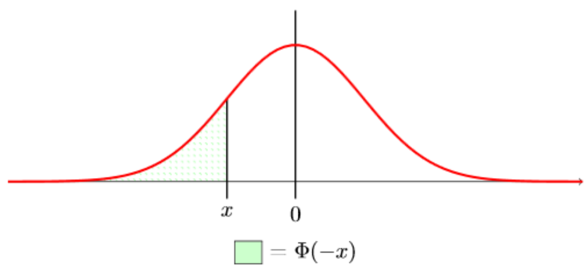
Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

En particulier, $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Remarque. Ce résultat provient de la parité de φ et peut se lire graphiquement :





Remarque. Il n'est pas possible d'exprimer "simplement" la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à l'aide des fonctions usuelles. Par contre, on dispose, en plus de ces quelques règles de calculs, d'une table de valeurs :

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Exemples.

1. Donner les valeurs de $\Phi(1.73)$ et de $\Phi(-0.67)$.

2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer, à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, la valeur de $x > 0$ telle que $P(-x \leq X \leq x) \simeq 0,95$.

Propriété 20 (Espérance et variance de la loi normale centrée réduite)

Si X est une variable aléatoire suivant une **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$, alors X possède une espérance et une variance donnée par :

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

Preuve.

□

4.4 Loi normale

Définition.

Une variable aléatoire X suit la **loi normale** de paramètres m et σ, notée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, si X a pour densité la fonction $\varphi_{m,\sigma}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ si X suit la **loi normale** de paramètres m et σ.

Remarque. Comme dans le cas centrée réduite, la fonction de répartition associée à la normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ n'admet pas d'expression "simple". On la note $\Phi_{m,\sigma}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Propriété 21 (Loi normale centrée réduite)

Pour tout réel m et pour tout réel $\sigma > 0$, on a :

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - m}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0, 1)$$

Preuve.

$\square$

Exemple. On suppose que Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 16)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(Y < 7)$ et $P(Y \leq 12, 12)$.

2. Déterminer le seuil x tel que : $P(Y \leq x) = 0,9162$.

3. Déterminer le seuil y tel que : $P(Y > y) = 0,9418$.

Théorème 22 (Espérance et variance)

Si X est une variable aléatoire qui suit la **loi normale** $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X possède une espérance et une variance donnée par :

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Preuve.

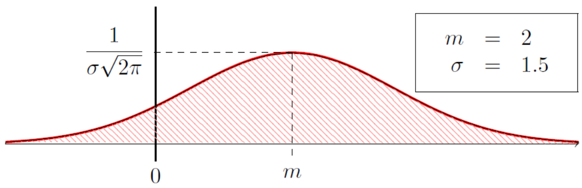
$\square$

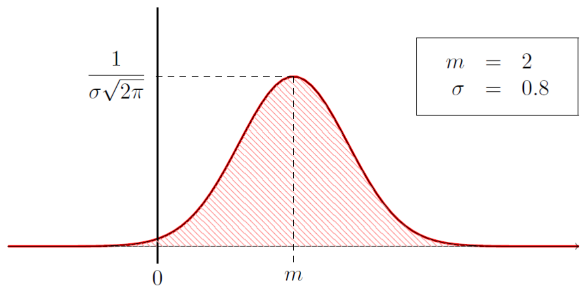
Remarques.

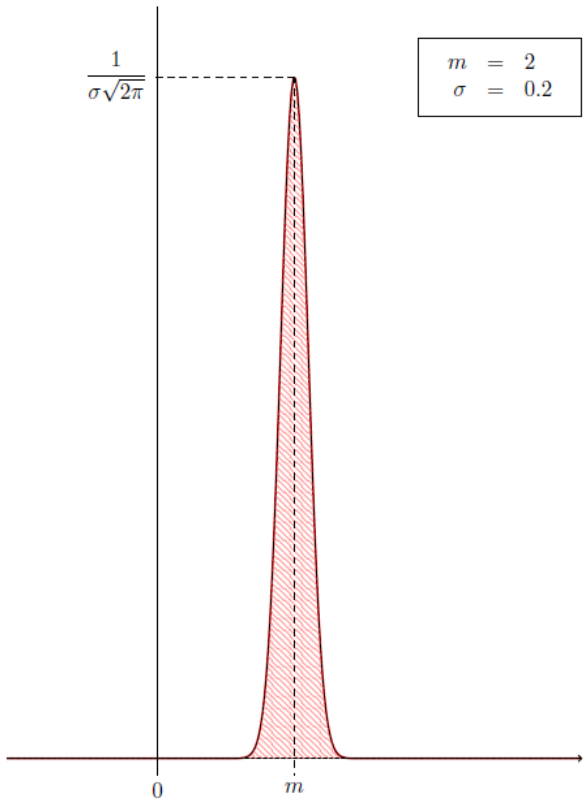
1. Ce théorème permet de comprendre les notations m et σ. Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$. Ainsi, la notation m peut-être lue comme "moyenne" et la notation σ est celle que nous avons déjà utilisée pour l'écart type.

2. La loi normale centrée réduite est simplement une loi normale particulière avec $m = 0$ et $\sigma = 1$.

3. Considérons une variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La densité d'une telle loi est représentée par une courbe en cloche.
   - La cloche est centrée en m.
   - La cloche (hauteur et largeur) dépend de σ. Plus σ est petit, plus le pic est haut et fin. Plus σ est grand, plus le pic est bas et large.







4.5 Tableau des lois à densité usuelles

Dénomination	Notation	Paramètres	Une densité	La fonction de répartition	Espérance	Variance
Loi uniforme	$\mathcal{U}([a,b])$	$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$	$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 1 & \text{si } b < x. \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi normale centrée réduite	$\mathcal{N}(0,1)$		$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) dt$	0	1
Loi normale	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt$	m	σ^2