Chapitre 2

Fonctions réelles d'une variable réelle

Compétences attendues.

✓ Connaître les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions usuelles et savoir tracer leurs courbes représentatives.

✓ Connaître les propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle.

✓ Calculer la composée de deux fonctions.

✓ Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité d'une fonction et calculer sa dérivée.

✓ Étudier la parité d'une fonction.

✓ Prouver qu'une fonction est bijective à l'aide du théorème de la bijection.

✓ Déterminer la bijection réciproque d'une fonction bijective.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Rappels

1.1 Définitions

Définition.

- On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **fonction réelle d'une variable réelle** ou plus simplement une **fonction** si, à tout élément $x \in \mathbb{R}$, f associe au plus un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
- Lorsqu'on a une égalité $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f.
- Le **domaine de définition** de f est l'ensemble :
$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe}\}.$$
- La **courbe représentative** de f désigne l'ensemble des points $(x, f(x))$, où $x \in \mathcal{D}_f$, dans un plan muni d'un repère orthonormé.

Remarques.

1. Une fonction f est donnée la plupart du temps par l'expression de $f(x)$. Par exemple :
$$f : x \mapsto x^2 - 2x - 3 \quad \text{ou simplement} \quad f(x) = x^2 - 2x - 3.$$
2. Tout réel x admet au plus une image par une fonction f : aucune image si $f(x)$ n'existe pas, une seule image si $f(x)$ existe.
3. Tout réel y peut admettre 0, 1, 2, 3, ..., ou même une infinité d'antécédents par une fonction f.
   Par exemple, pour la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 3$, 0 admet deux antécédents (-1 et 3), -4 admet un antécédent, -5 n'admet pas d'antécédent.

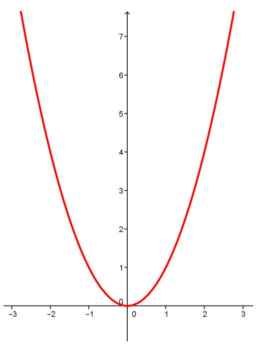
1.2 Fonctions usuelles

Fonctions polynômiales

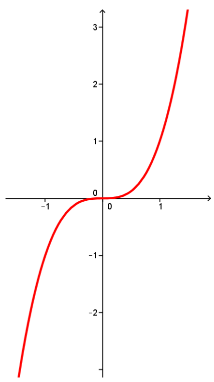
Définition.

On dit qu'une fonction f est une **fonction polynômiale** ou un **polynôme** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$
Les fonctions polynômiales sont **définies sur** $\mathbb{R}$.

Représentation graphique. Voici les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^{2n}$ et $x \mapsto x^{2n+1}$:



Fonctions $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$



Fonctions $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

Fonctions rationnelles

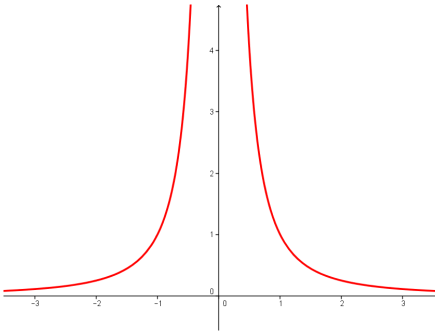
Définition.

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction f qui est le quotient de deux polynômes P et Q :

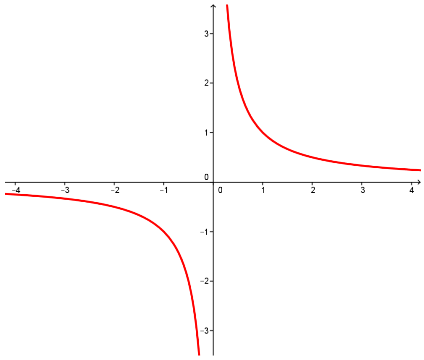
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Les fonctions rationnelles sont **définies sur** $\mathbb{R}$ **privé des racines du dénominateur**.

Représentation graphique. Voici les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$:



Fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$



Fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

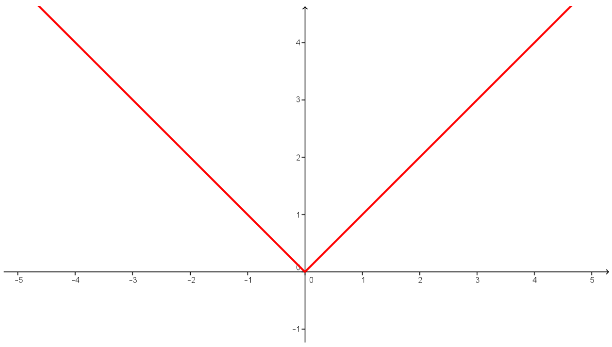
Fonction valeur absolue

Définition.

La fonction **valeur absolue** est la fonction **définie sur** $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe la valeur absolue $|x|$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Représentation graphique. Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue :



Fonction partie entière

Définition.

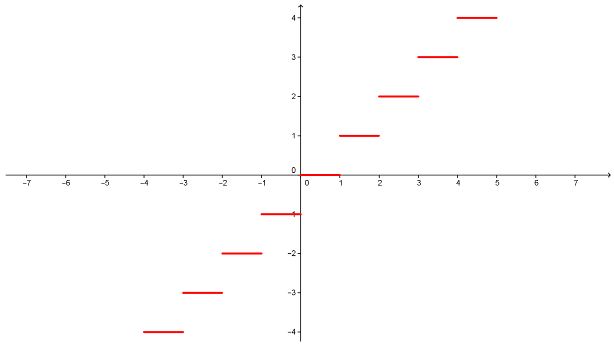
La fonction **partie entière** est la fonction **définie sur** $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe l'unique entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$, qui vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

En d'autres termes, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à x.

Exemple. $\lfloor 2.3 \rfloor =$ $\lfloor \pi \rfloor =$ $\lfloor -3.2 \rfloor =$ $\lfloor -\frac{3}{2} \rfloor =$

Représentation graphique. Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :

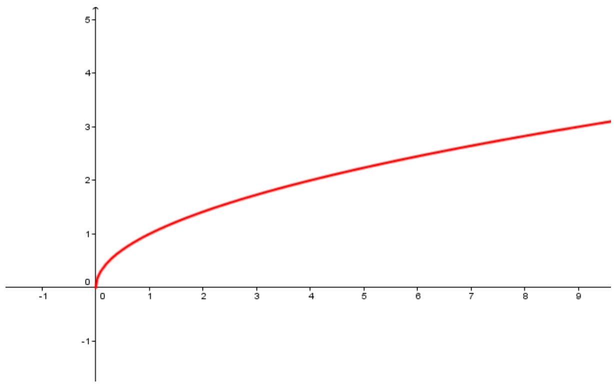


Fonction racine carrée

Définition.

La fonction **racine carrée** est la fonction **définie sur** $\mathbb{R}_+$ qui, à tout réel positif x, associe $\sqrt{x}$.

Représentation graphique. Voici la courbe représentative de la fonction racine carrée :



Fonctions logarithme et exponentielle

Définition.

- On appelle fonction **logarithme** l'unique fonction notée ln, **définie, continue et dérivable sur** $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0.$$
- On appelle fonction **exponentielle** l'unique fonction notée exp, **définie, continue et dérivable sur** $\mathbb{R}$, qui vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp'(x) = \exp(x) \qquad \text{et} \qquad \exp(0) = 1.$$

Théorème 1 (Propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle)

Pour tous réels $x, y > 0$ et pour tout entier n,

(1) $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

(2) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

(3) $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

(4) $\exp(\ln(x)) = x$.

Pour tous réels x, y et pour tout entier n,

(6) $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

(7) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

(8) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

(9) $\ln(\exp(x)) = x$.

Notation. Les propriétés de la fonction exponentielle étant similaires à celles sur les puissances de nombres réels, on utilisera en général la notation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x.$$

Exemple. Simplifier les expressions suivantes :

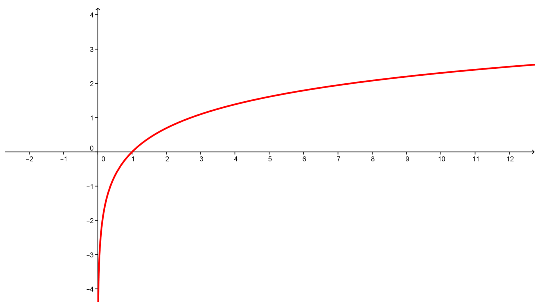
- $A = \ln(\sqrt{5} - 2) + \ln(\sqrt{5} + 2)$

- $B = \dfrac{\ln(20) - 2\ln(2) + \ln(5)}{\ln(25)}$

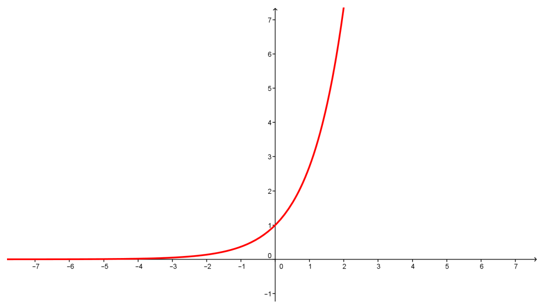
- $C = \dfrac{e^{\ln(2)} + (e^3)^2 - 2}{e^8 \times e^{-2}}$

- $D = \ln\left((e^1 + e^{-1})^2 - e^1(e^1 + e^{-3})\right)$

Représentation graphique. Voici les courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle :



Fonction logarithme



Fonction exponentielle

Remarques.

1. La fonction logarithme est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

   La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Fonctions puissances

Définition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** d'exposant α la fonction f **définie sur** $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

Remarques.

1. Cette définition coïncide avec celle des puissances entières : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp(n \ln(x)) = \exp(\ln(x^n)) = x^n.$$

   On fera attention que :

   - lorsque α est un entier, x^α est définie pour tout réel x non nul (avec la définition du chapitre 1),
   - lorsque α est un réel non entier, x^α n'est définie que lorsque $x > 0$ (avec la définition précédente).

2. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x^{1/2} \times x^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \exp(\ln(x)) = x.$$

   Donc, pour tout $x > 0$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Les propriétés des puissances réelles sont semblables à celles des puissances entières :

Propriété 2 (Puissance réelle d'un nombre réel strictement positif)

Soient α et β des réels quelconques. Alors :

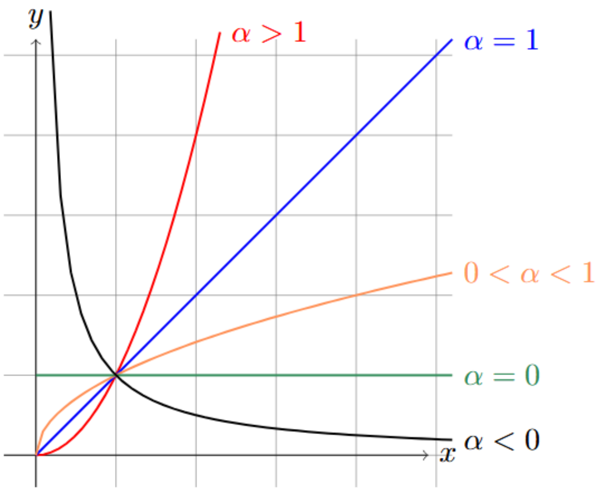
(1) Pour tout $x > 0$, $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$.

(2) Pour tout $x, y > 0$, $x^\alpha \times y^\alpha = (x \times y)^\alpha$; $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha$.

(3) Pour tout $x > 0$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

(4) Pour tout réel x, $e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$.

Représentation graphique. Voici les différentes allures de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$:



Remarques.

1. Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$.
2. Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$.

1.3 Opérations sur les fonctions

Définition.

- Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I et λ un réel.
  La **somme** des fonctions f et g est la fonction, notée $f+g$, définie sur I par :
  $$\forall x \in I,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
  Le **produit par un scalaire** de la fonction f et du réel λ est la fonction, notée λf, définie sur I par :
  $$\forall x \in I,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$
  Le **produit** des fonctions f et g est la fonction, notée fg, définie sur I par :
  $$\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x) \times g(x).$$
  Si g ne s'annule pas sur I, le **quotient** des fonctions f et g est la fonction, notée $\dfrac{f}{g}$, définie sur I par :
  $$\forall x \in I,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$. La **composée de f par g** est la fonction, notée $g \circ f$, définie sur I par :
  $$\forall x \in I,\ (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Exemples.

1. On considère les fonctions suivantes : $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = e^x$. Donner l'expression des fonctions composées suivantes :

   (1) $h \circ f$ (2) $f \circ h$ (3) $f \circ g$ (4) $g \circ f$ (5) $f \circ (h \circ g)$ (6) $(f \circ h) \circ g$

2. Écrire les fonctions suivantes sous la forme d'une composée de deux fonctions :

(1) $f(x) = (x-3)^2$ (2) $g(x) = e^{1/x}$ (3) $h(x) = \ln(x+1)$ (4) $i(x) = \sqrt{x}+3$

2 Étude de fonctions

2.1 Domaine de définition

Méthode.
On détermine le **domaine de définition** $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f à partir de l'expression de $f(x)$. S'il y a :

- Un dénominateur : il faut supprimer de $\mathcal{D}_f$ les racines de ce dénominateur.
- $\sqrt{u(x)}$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) \geq 0$ et restreindre $\mathcal{D}_f$ à l'ensemble des solutions.
- $\ln(u(x))$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) > 0$ et restreindre $\mathcal{D}_f$ à l'ensemble des solutions.

Exemples. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

- $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

- $g(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x^2-6x+5}\right)$

- $h(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{x^2 - 3x - 10}$

Méthode.
Pour déterminer le **domaine de définition** des **fonctions puissances** du type

$$x \mapsto (u(x))^{\alpha} \text{ (avec } \alpha \text{ non entier)} \qquad \text{ou} \qquad x \mapsto u(x)^{v(x)},$$

on commencera **toujours** par l'écrire sous **forme exponentielle** :

$$(u(x))^{\alpha} = e^{\alpha \ln(u(x))} \qquad \text{ou} \qquad u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}.$$

Exemple. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2^x$

- $g(x) = (1 - x^2)^{\sqrt{3}}$

- $h(x) = (\ln(x))^{\ln(x)}$

2.2 Parité

Définition.

- Une fonction f est **paire** lorsque $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x).$$

- Une fonction f est **impaire** lorsque $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x).$$

Exemples.

1. Les fonctions $x \mapsto x^{2n}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ et la fonction valeur absolue sont paires.
2. Les fonctions $x \mapsto x^{2n+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ sont impaires.

Méthode.

Pour étudier la parité d'une fonction, on procède en deux étapes :

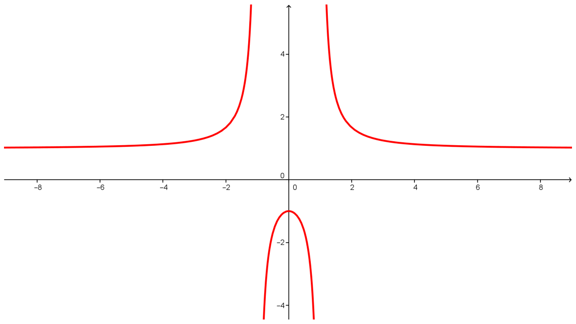
- On vérifie que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 (il suffit de le constater en déterminant $\mathcal{D}_f$).
- On exprime $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$. Si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$, alors f est paire, et si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.

Exemples.

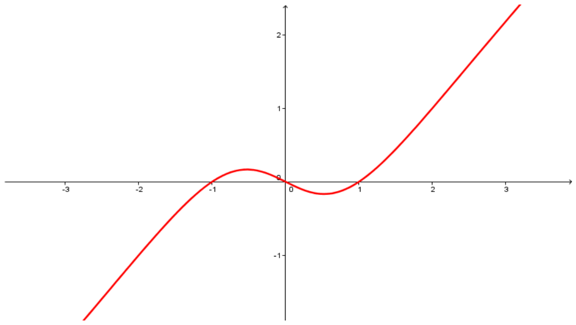
1. Étudier la parité de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

2. Étudier la parité de la fonction $g(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2+2}$.

Voici les courbes représentatives de f et g :



Courbe représentative de f



Courbe représentative de g

On constate que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

On peut généraliser cette observation à toutes les fonctions paires ou impaires :

Propriété 3 (Interprétation graphique de la parité)

(1) Une fonction f est **paire** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

(2) Une fonction f est **impaire** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Remarque. On retiendra que pour étudier de telles fonctions, il suffira de se restreindre au domaine $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$ et de compléter la courbe par une simple symétrie.

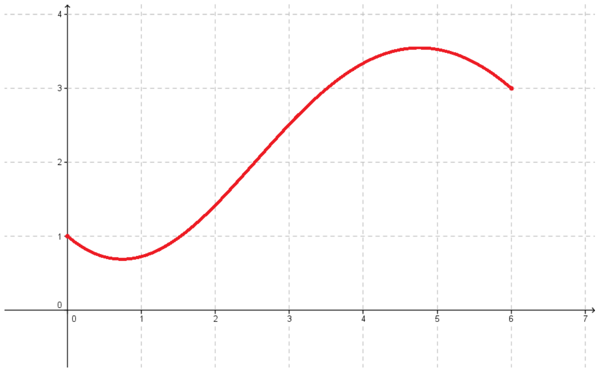
2.3 Continuité

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **continue** en un point $x_0 \in I$ si, plus x est proche de x_0, plus $f(x)$ est proche de $f(x_0)$. Dans ce cas, on note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est **continue** sur un intervalle I si elle est **continue** en tout point de I.

Interprétation graphique. Une fonction est **continue** sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un "trait continu", sans lever le crayon :



Fonction continue sur $[0, 6]$

Fonction discontinue en 2

Théorème 4 (Opérations sur les fonctions continues)

(1) Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I et λ un réel. Alors :

- $f+g$, λf et fg sont **continues** sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est **continue** sur I.

(2) Soient f une fonction **continue** sur un intervalle I et g une fonction **continue** sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est définie et **continue** sur I.

Théorème 5 (Fonctions usuelles et continuité)

(1) Les fonctions **polynomiales**, les fonctions **rationnelles**, la fonction **valeur absolue**, la fonction **racine carrée**, les fonctions **logarithme** et **exponentielle** et les fonctions **puissances** sont **continues** là où elles sont définies.

(2) La fonction **partie entière** est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle est constante égale à n sur cet intervalle. Par contre, elle est discontinue en tout point $n \in \mathbb{Z}$.

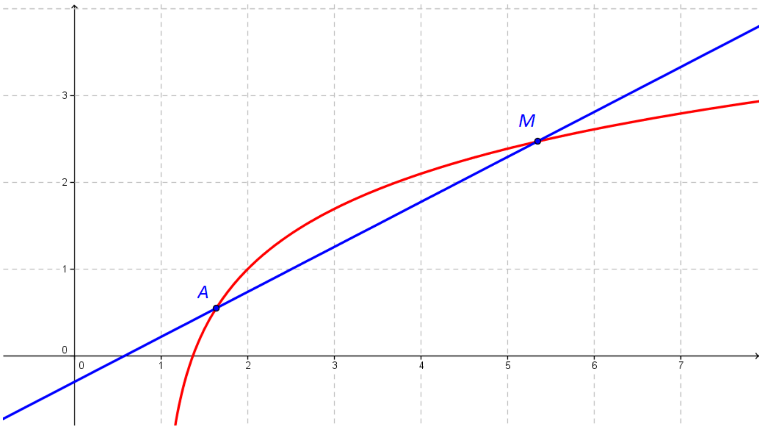
2.4 Dérivabilité

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On appelle **taux d'accroissement** de f entre x et x_0 le quotient :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Interprétation graphique. Soit un réel x_0 et un point fixe $A(x_0, f(x_0))$. Considérons un réel x et un point courant $M(x, f(x))$. Le taux d'accroissement représente alors le coefficient directeur de la droite (AM).



Définition.

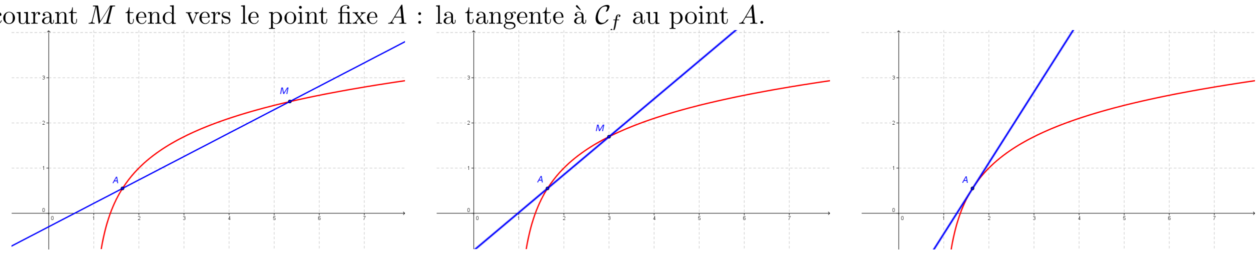
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On dit que f est **dérivable** en x_0 si, plus x est proche de x_0, plus le **taux d'accroissement**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

tend vers un nombre réel. Ce nombre est appelé **nombre dérivé de f en x_0** et est noté $f'(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Interprétation graphique. f est donc dérivable en x_0 si la corde admet une position limite lorsque le point courant M tend vers le point fixe A : la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.



Propriété 6 (Équation d'une tangente)

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors l'**équation de la tangente** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

En particulier, $f'(x_0)$ est le **coefficient directeur** de la tangente en x_0 à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

Définition.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **dérivable** sur I si f est **dérivable en tout point** de I.
- Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f la fonction f' qui à tout réel $x \in I$ associe $f'(x)$.

Propriété 7 (Continuité et dérivabilité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

(1) Soit $x_0 \in I$. Si f est **dérivable** en x_0, alors f est **continue** en x_0.

(2) Si f est **dérivable** sur I, alors f est **continue** sur I.

Attention.

La dérivabilité d'une fonction implique donc sa continuité. La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point.
Par exemple, les fonctions **valeur absolue** et **racine carrée** sont continues et non dérivables en 0.

Théorème 8 (Opérations sur les fonctions dérivables)

(1) Soient f, g deux fonctions définies et **dérivables** sur un intervalle I et λ un réel. Alors :

- $f + g$, λf et fg sont **dérivables** sur I et pour tout $x \in I$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \qquad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est **dérivable** sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

(2) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$. Alors la **composée** $g \circ f$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\left(f(x)\right).$$

Théorème 9 (Fonctions usuelles et dérivabilité)

(1) Les fonctions **polynomiales**, les fonctions **rationnelles**, les fonctions **logarithme** et **exponentielle**, les fonctions **puissances** sont dérivables partout où elles sont définies.

(2) Les fonctions **valeur absolue** et **racine carrée** sont dérivables partout où elles sont définies **sauf en** 0.

(3) Le tableau ci-dessous rassemble les dérivées à connaître :

Fonction $f(x) = ...$	Fonction dérivée $f'(x) = ...$
constante	0
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$(u(x))^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Méthode.
Considérons une fonction dont on a déjà déterminé le domaine de **définition**. Avant de la dériver, il faut préciser le :

1. Domaine de **continuité** : c'est le même que le domaine de définition sauf s'il y a une **partie entière**.
2. Domaine de **dérivabilité** : c'est le même que le domaine de continuité sauf s'il y a une **valeur absolue** ou une **racine carrée** (dans ce cas dernier cas, il faut supprimer les valeurs qui annulent la racine).

Exemple. Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

- $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$

- $g(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x - 3}$

- $h(x) = (-5x+1)^4$

- $i(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^3}$

- $j(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

- $k(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)$

- $l(x) = \ln(1-\sqrt{x})$

- $m(x) = xe^{-x^2}$

- $n(x) = e^{\sqrt{x+2}}$

- $o(x) = \dfrac{x}{e^{2x} - 1}$

Méthode.

Pour calculer la dérivée d'une **fonction puissance** du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on commencera **toujours** par l'écrire sous **forme exponentielle** :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}.$$

Exemple. Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

- $p(x) = (\ln(x))^x$

- $q(x) = (1+x)^{\sqrt{x}}$

2.5 Monotonie

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est **constante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a : $f(x) = f(y)$.
- La fonction f est **croissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a : $f(x) \leq f(y)$.
- La fonction f est **décroissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a : $f(x) \geq f(y)$.
- La fonction f est **monotone** sur I si f est soit croissante, soit décroissante sur I.

Si les inégalités sont strictes, on dira que f est **strictement croissante** (ou **décroissante** ou **monotone**).

La dérivée d'une fonction est un outil très commode pour étudier le sens de variation d'une fonction :

Propriété 10 (Caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(1) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur I.

(2) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur I.

(3) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

Méthode.

Pour prouver une inégalité du type $A(x) \geq B(x)$ lorsque $A(x)$ et $B(x)$ ne sont pas des fonctions rationnelles (par exemple s'il y a de l'exponentielle ou du logarithme dans l'expression de $A(x)$ ou $B(x)$), il faut :

1. Définir la fonction $f(x) = A(x) - B(x)$,
2. Étudier les variations de f,
3. En déduire le signe de f puis l'inégalité à démontrer.

Exemple. Montrer que, pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

2.6 Plan d'étude d'une fonction

Méthode.

Terminons cette partie en résumant les différentes étapes pour l'étude d'une fonction f :

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Si cela est demandé, étudier la parité de f et restreindre éventuellement l'intervalle d'étude.
3. Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de f.
4. Calculer et factoriser la fonction dérivée f' puis déterminer son signe sur son domaine de dérivabilité.
5. En déduire les variations de f.
6. Tracer la courbe représentative de f.

3 Fonctions bijectives

3.1 Théorème de la bijection

Définition.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans J. La fonction f est une **bijection** de I dans J lorsque tout élément $y \in J$ possède **un unique antécédent** $x \in I$ par f.

Notation. Soit E un ensemble. On notera $\exists ! x \in E$ pour dire "il existe un unique x dans E" ou "on peut trouver un unique x dans E". Ainsi, f est une bijection de I dans J si

$$\forall y \in J,\ \exists ! x \in I,\ y = f(x).$$

Théorème 11 (de la bijection)

Soit f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une **bijection** de I dans J.

Exemples.

1. La fonction **logarithme** est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction **exponentielle** est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
3. La fonction **racine carrée** est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
4. La fonction **carrée** est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
5. La fonction **inverse** est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour montrer que f est bijective, on montre que f est continue et strictement monotone sur I. Alors, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = [-1, 0]$ dans un intervalle J à déterminer.

2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$.

3.2 Bijection réciproque

Définition.

Soit f une bijection d'un intervalle I dans $J = f(I)$.
On appelle alors **bijection réciproque** de f la fonction notée f^{-1} définie par :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} J & \to & I \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$$

Ainsi, on a pour tout $x \in I$ et $y \in J$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Propriété 12 (Bijection et bijection réciproque)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, **continue** et **strictement monotone**. Alors f réalise une **bijection** de I dans $J = f(I)$, et sa **bijection réciproque** vérifie :

(1) Pour tout $x \in I$ et $y \in J$,

$$f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

En particulier, f^{-1} réalise une **bijection** de J sur I.

(2) Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la première bissectrice du plan d'équation** $y = x$.

(3) f^{-1} est elle-même **continue** sur J, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.

(4) Si f est **dérivable** sur I et si f' **ne s'annule pas** sur I, alors f^{-1} est **dérivable** sur J et

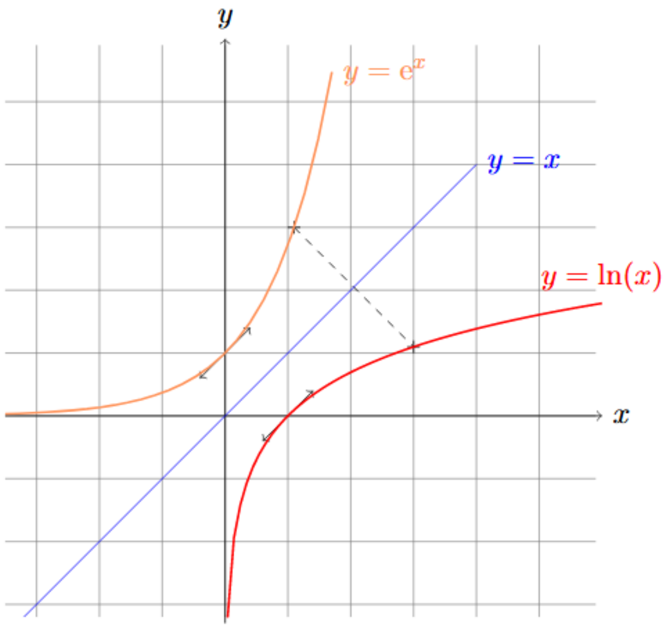
$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemples.

1. Les fonctions $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ sont **bijections réciproques** l'une de l'autre. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\exp \circ \ln(x) = \exp(\ln(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \ln \circ \exp(y) = \ln(\exp(y)) = y.$$

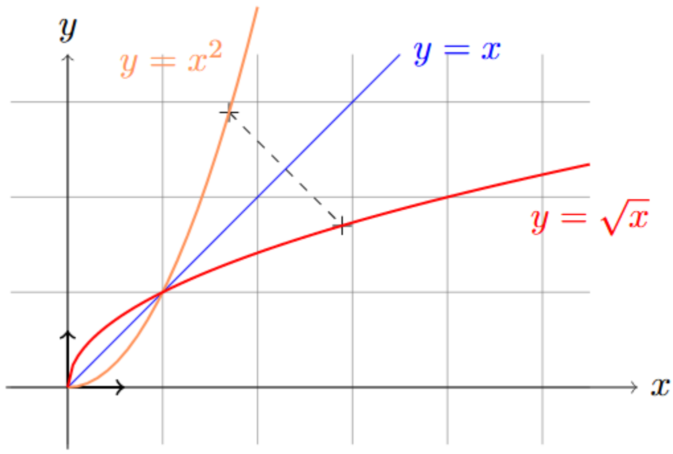
Ceci se remarque aussi graphiquement puisque les courbes représentatives de ln et de exp sont symétriques par rapport à la droite $y = x$:



2. Les fonctions **racine carrée** $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et **carrée** $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont **bijections réciproques** l'une de l'autre. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$g \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et} \qquad f \circ g(y) = \sqrt{y^2} = |y| = y.$$

Ceci se remarque aussi graphiquement puisque les courbes représentatives des fonctions **racine carrée** et **carrée** sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ sur $\mathbb{R}^+$:



3. La fonction **inverse** $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est sa propre **bijection réciproque**. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h \circ h(x) = h(h(x)) = h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Ceci se remarque aussi graphiquement puisque la courbe représentative de la fonction **inverse** est symétrique par rapport à la droite $y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode.
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J et g une fonction définie sur J et à valeurs dans I. Pour montrer que f et g sont bijections réciproques l'une de l'autre, on montre que :

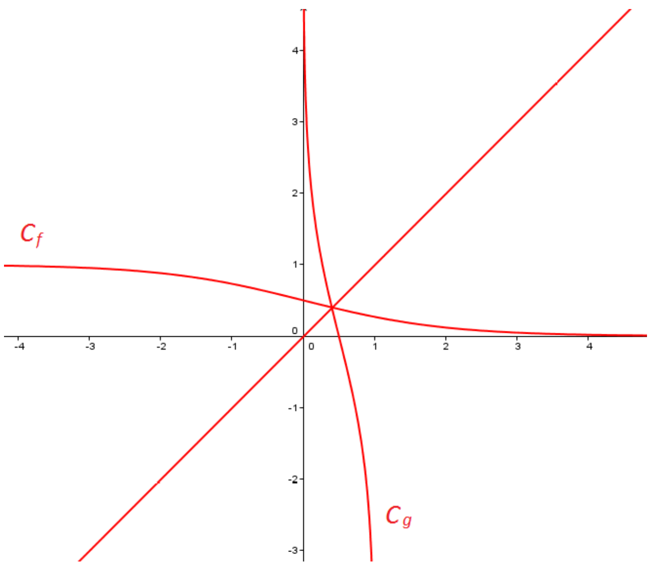
$$\forall x \in I,\ g \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J,\ f \circ g(y) = y$$

Exemple. On considère les fonctions suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{e^x+1} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right) \end{array} \right.$$

Démontrer que f et g sont bijections réciproques l'une de l'autre.

Voici les courbes représentatives de f et de g (on pourra encore remarquer qu'elles sont bien symétriques par rapport à la droite $y = x$) :



Méthode.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour montrer que f est bijective et obtenir l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}, on montre que l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) possède une unique solution qui est $x = f^{-1}(y)$.

Exemple. Soit g la fonction définie par :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl}]-\infty,-1[& \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array} \right.$$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Voici les courbes représentatives de g et de g^{-1} (on pourra encore remarquer qu'elles sont bien symétriques par rapport à la droite $y = x$) :