Chapitre 3

Suites réelles

Compétences attendues.

✓ Étudier la monotonie d'une suite.

✓ Reconnaitre et mettre sous forme explicite les différentes suites usuelles.

✓ Calculer la limite d'une suite donnée par une formule explicite, en levant une forme indéterminée si nécessaire.

✓ Prouver la convergence d'une suite à l'aide d'un théorème de passage à la limite dans les inégalités, du théorème des suites monotones ou du théorème des suites adjacentes.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition.

Une **suite réelle** u est une **application** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que tout élément $n \in \mathbb{N}$ possède une image $u(n)$ par u :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array} \right.$$

L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Notations.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est appelé le **terme de rang** n de la suite et on le notera u_n.
2. Une telle application u sera aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).

Remarques.

1. Dans certains cas, une suite peut être indexée non pas à partir de 0, mais à partir d'un entier supérieur. Par exemple, la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}$ est définie pour $n \geq 1$.
2. Généralement, les suites seront définies de l'une des deux façons suivantes :
   - par une **formule explicite**, directement en fonction de n; par exemple,
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3n}{2n+1}$$
   - par une **formule de récurrence**, c'est-à-dire une relation entre les termes consécutifs de la suite et la donnée d'un ou plusieurs premiers termes; par exemple,
   $$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$
3. Comme pour les fonctions, on peut définir différentes opérations sur les suites :
   - une **addition** $+$ de sorte que si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite "somme" est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n$$
   - un **produit externe** . de sorte que si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda.u$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda \times u_n$$
   - une **multiplication** $\times$ de sorte que si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite "produit" est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (u \times v)_n = u_n \times v_n$$

1.2 Suites monotones

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On parlera d'une suite **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **strictement monotone** si les inégalités précédentes sont strictes.

Méthode.

Pour étudier le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on utilisera généralement l'une des deux méthodes suivantes :

- On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:
  - Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.
  - Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante.
- Si tous les termes de la suite sont **strictement positifs**, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 :
  - Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.
  - Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante.

Exemples.

1. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. Étudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

1.3 Suites bornées

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si et seulement si elle est à la fois **majorée et minorée**.

Remarques.

1. Une suite **croissante** est **minorée** par son premier terme u_0. En effet, pour tout entier naturel n,
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots$$
2. Une suite **décroissante** est **majorée** par son premier terme u_0. En effet, pour tout entier naturel n,
$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_{n-1} \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots$$

Exemple. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ou décroissante ?

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2 Suites usuelles

2.1 Suites arithmétiques

Définition.

Une **suite arithmétique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante réelle r, appelée **raison** de la suite arithmétique.
En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Théorème 1 (Formule explicite d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **suite arithmétique** de raison r. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$
Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r$$

Remarque. En particulier, une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement déterminée par son premier terme et sa raison.

Preuve.

□

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -1$.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n puis déterminer son sens de variation.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2.2 Suites géométriques

Définition.

Une **suite géométrique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n,$$

où q est une constante réelle, appelée la **raison** de la suite géométrique.

Théorème 2 (Formule explicite d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **suite géométrique** de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0,$$

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \geq p,\ u_n = q^{n-p} u_p.$$

Remarque. En particulier, une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement déterminée par son premier terme et sa raison.

Preuve.

□

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 3.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n puis déterminer son sens de variation.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exemple. Jean-Louis place une somme S sur un compte fournissant un taux d'intérêt annuel $r > 0$.

1. Exprimer la somme S_n dont dispose Jean-Louis à l'issue de n années.

2. Au bout de combien d'années au moins la somme aura-t-elle doublée ?

2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b, $a \neq 1$, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Propriété 3 (des suites arithmético-géométriques)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **suite arithmético-géométrique** vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.
Soit x_0 l'unique solution de l'équation $x = ax + b$.
Alors la suite $(u_n - x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** de raison a.

Preuve.

$\square$

Méthode.

Pour étudier une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. On calcule l'unique solution x_0 de l'équation $x = ax + b$.
2. On démontre que la suite $(u_n - x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
3. On en déduit l'expression de u_n en fonction de n.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Déterminer u_n en fonction de n.

Exemple. Jean-Louis épargne chaque année 20% de son revenu R et consomme le reste. Il place son épargne sur un compte fournissant un taux d'intérêt annuel $r > 0$.

1. Exprimer de la somme S_n dont dispose Jean-Louis à l'issue de n années en fonction de R, r et n.

2. Au bout de combien d'années au moins Jean-Louis pourra-t-il cesser de travailler sans modifier son niveau de vie ?

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre** 2 s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Remarque. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est totalement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes.

Théorème 4 (Formule explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On appelle **équation caractéristique** associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation (E) : $x^2 = ax + b$.

(1) Si l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

(2) Si l'équation (E) admet une unique racine double x_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)x_0^n.$$

Méthode.

Pour étudier une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$:

1. On résout l'équation caractéristique (E) : $x^2 = ax + b$ associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Deux cas sont possibles :
   - Si (E) admet deux racines distinctes x_1 et x_2, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.
   - Si (E) admet une unique racine double x_0, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)x_0^n$.
3. On détermine les constantes λ et μ à l'aide des deux premiers termes de la suite.

Exemples.

1. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

   $$u_0 = 2,\ u_1 = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n.$$

   Déterminer u_n en fonction de n.

2. Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

   $$v_0 = 1,\ v_1 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n.$$

   Déterminer v_n en fonction de n.

3 Convergence d'une suite réelle

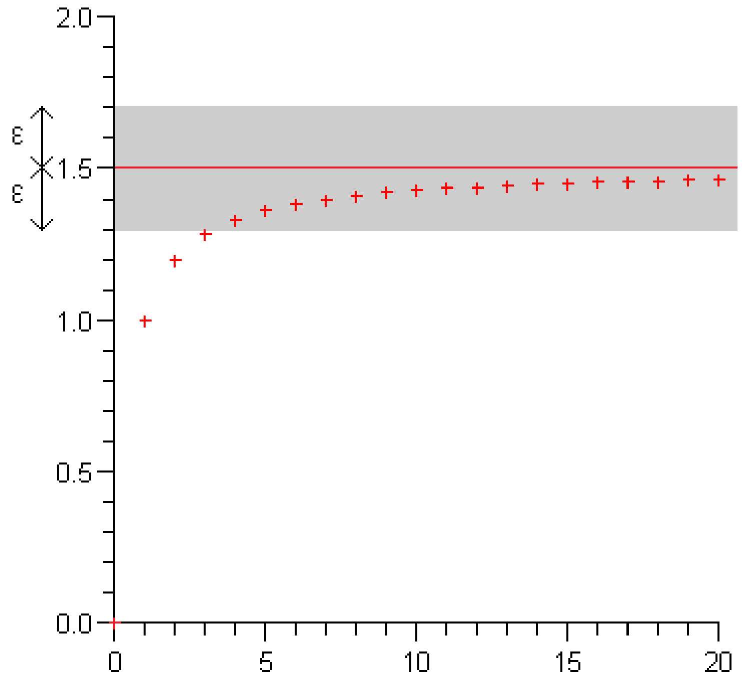
3.1 Suites convergentes et divergentes

Exemple. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n}{2n+1}$. On cherche à déterminer le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Voici quelques valeurs numériques de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	0	1	1.2	1.286	1.333	1.364	1.385	1.4	1.412	1.421

On remarque que plus n augmente, plus les valeurs de u_n sont proches de $\frac{3}{2}$. Cela se voit aussi graphiquement : quelle que soit la largeur ε de la bande horizontale centrée sur la droite $y = \frac{3}{2}$, il existe un rang à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont situés dans cette bande :



On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $\dfrac{3}{2}$. De façon plus formelle, on a la définition suivante :

Définition.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** ou est **convergente** lorsqu'il existe un réel ℓ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel la quantité $|u_n - \ell|$ est inférieure à ε. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une **limite** ℓ ou admet pour **limite** ℓ.
Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

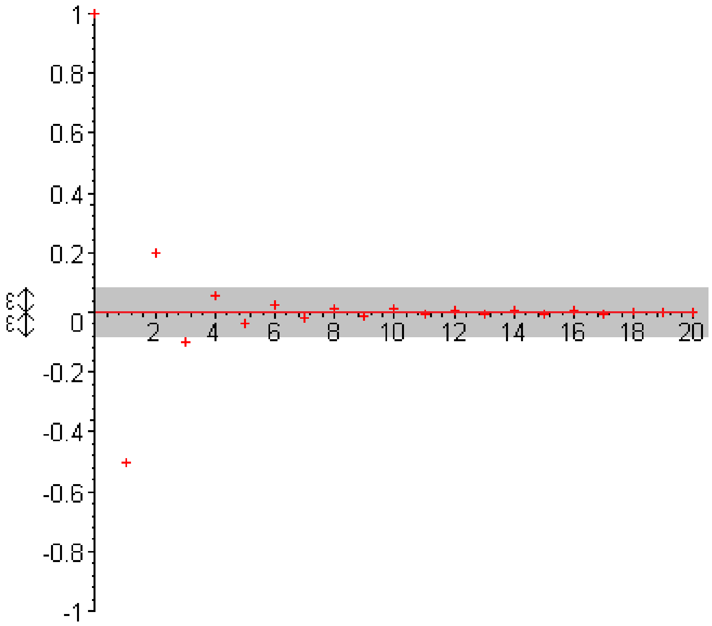
Exemples.

- Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

  Voici quelques valeurs numériques de v_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v_n	1	-0.5	0.2	-0.1	0.059	-0.038	0.027	-0.02	0.015	-0.012

  Plus n est grand, plus les valeurs de v_n sont proches de 0. Graphiquement, quelle que soit la largeur ε de la bande horizontale centrée sur l'axe des abscisses, il existe un rang à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont situés dans cette bande :



Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = (-1)^n$ est divergente. En effet, $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on remarque qu'il n'existe pas de bande horizontale de largeur ε contenant toutes les valeurs de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Théorème 5 (Unicité de la limite)

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique et elle sera notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Remarque. Une suite convergente est bornée. Par contre, la réciproque est fausse : une suite bornée n'est pas forcément convergente. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on a vu qu'elle était divergente.

Définition.

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, lorsque pour tout réel $A > 0$, il existe un rang N à partir duquel u_n est supérieur à A. Autrement dit,

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ u_n \geq A.$$

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, lorsque pour tout réel $B < 0$, il existe un rang N à partir duquel u_n est inférieur à B. Autrement dit,

$$\forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ u_n \leq B.$$

Théorème 6 (Limites usuelles)

(1) Pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.

(2) Pour tout réel $q \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Pour tout réel $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(3) Pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\alpha n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(n))^\alpha = +\infty$.

3.2 Opérations sur les limites

Nous allons énoncer les règles de calculs sur les limites par des tableaux. La notation F.I. signifie **forme indéterminée** ce qui signifie qu'aucun théorème ne nous permet de conclure en général. Nous verrons par la suite des méthodes pour lever cette indétermination.

Théorème 7 (Opérations sur les limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

(1) Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(2) Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(3) Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, $\ell' \neq 0$,

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	ℓ'	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas particulier où ℓ' est nul,

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0
si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Les **formes indéterminées**, c'est-à-dire les cas où on ne peut pas conclure, sont symboliquement représentés par :

$$\boxed{\infty-\infty, \quad 0\times(\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}}$$

Exemples. (de formes indéterminées)

- Considérons la forme indéterminée $\infty-\infty$ dans les cas suivant :
  - avec $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n(n-1)$ diverge vers $+\infty$.
  - avec $u_n = n+\ell$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = \ell$ converge vers ℓ.

  - avec $u_n = n$ et $v_n = -n^2$, alors $u_n + v_n = -n(n-1)$ diverge vers $-\infty$.
  - avec $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = (-1)^n$ diverge.

- Considérons la forme indéterminée $\infty \times 0$ dans les cas suivant :
  - avec $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $u_n v_n = n$ diverge vers $+\infty$.
  - avec $u_n = \ell n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $u_n v_n = \ell$ converge vers ℓ.
  - avec $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors $u_n + v_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.
  - avec $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, alors $u_n v_n = (-1)^n$ diverge.

Comme on le voit, tous les cas sont susceptibles de se produire, d'où le terme de **forme indéterminée**.

Méthode.

Pour calculer la limite d'une suite donnée par une formule explicite :

1. On détermine la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de la suite.
2. Deux cas sont possibles :
   - Si on n'obtient pas de **forme indéterminée** :
     On peut alors calculer directement la limite de la suite à l'aide des opérations sur les limites.
   - Si on obtient une **forme indéterminée** :
     On transforme l'expression de la suite pour lever l'indétermination (en factorisant par les termes qui divergent le plus vite vers l'infini ou en multipliant par l'expression conjuguée). On calcule ensuite la limite de la suite à l'aide des opérations sur les limites.

Exemples. Calculer les limites des suites suivantes :

- $a_n = \dfrac{n^2 + 5n - 1}{2n^2 + 3}$

- $b_n = \dfrac{e^{-n}}{n + \ln(n)}$

- $c_n = \dfrac{2^n + 3^n + 5^n}{2^n - 3^n + 5^n}$

- $d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

- $e_n = \dfrac{2 - \dfrac{5}{3^n}}{n^3 + \sqrt{n}}$

Pour lever une indétermination, il sera souvent utile de connaître le comportement asymptotique de certaines suites les unes par rapport aux autres. C'est ce qu'on appelle les **croissances comparées** :

Propriété 8 (Croissances comparées)

Pour tout réel $\alpha, \beta, \gamma > 0$, on a :

$$(1) \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta} = 0 \qquad (2) \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{e^{\gamma n}} = 0 \qquad (3) \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{e^{\gamma n}} = 0$$

Autrement dit, l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme.

Exemples. Calculer les limites des suites suivantes :

- $f_n = \dfrac{e^{-n}}{n^2 - \ln(n)}$
- $g_n = \dfrac{e^n - n^2 + \ln(n)}{2^n}$
- $h_n = \dfrac{\sqrt{n} + \ln(n)}{n^2 + 3}$
- $i_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n - \sqrt{n}}$

Propriété 9 (de composition des limites)

Soit $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathcal{D}_f$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exemples. Calculer les limites des suites suivantes :

- $j_n = \dfrac{\sqrt{n^2 - 2n + 1}}{n}$

- $k_n = \exp\left(-n + \dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$

- $l_n = \ln(n^2+1) - \ln(n^2+2)$

3.3 Limites et inégalités

Théorème 10 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

On considère deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et deux nombres réels m et M.

(1) Si $u_n \leq M$ pour tout entier naturel n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq M$.

(2) Si $u_n \geq m$ pour tout entier naturel n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq m$.

(3) Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème 11 (d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exemple. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.

2. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, montrer que : $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Pour les suites qui divergent vers $\pm\infty$, on a le théorème suivant :

Théorème 12 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n.$$

(1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

2. En prenant $x = \dfrac{1}{k}$, montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

3. En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 1 à n, montrer que $u_n \geq \ln(n+1)$.

4. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.4 Convergence des suites monotones et adjacentes

Pour finir ce chapitre, nous présentons deux théorèmes, des suites monotones et des suites adjacentes, qui permettent de démontrer la convergence d'une suite.

Théorème 13 (des suites monotones)

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **majorée**, alors elle est **convergente**.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **non majorée**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** et **minorée**, alors elle est **convergente**.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** et **non minorée**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

2. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 2 à n, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$.

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Que peut-on en déduire ?

Définition.

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** lorsqu'elles vérifient les trois hypothèses suivantes :

(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, (2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, (3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 14 (des suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux **suites adjacentes** telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers une même limite** notée ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le \ell \le v_n.$$

Preuve.

$\square$

Exemple. Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.