Chapitre 5

Comportement asymptotique des fonctions

Compétences attendues.

- ✓ Connaitre les limites des fonctions usuelles.
- ✓ Calculer la limite d'une fonction à l'aide des opérations sur les limites.
- ✓ Connaitre la liste des formes indéterminées et savoir lever l'indétermination dans chacun des cas.
- ✓ Interpréter les limites en terme d'asymptotes verticales ou horizontales.
- ✓ Démontrer que la courbe représentative d'une fonction admet une asymptote oblique et déterminer la position relative de la courbe et de son asymptote.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Limites

1.1 Limite en un point

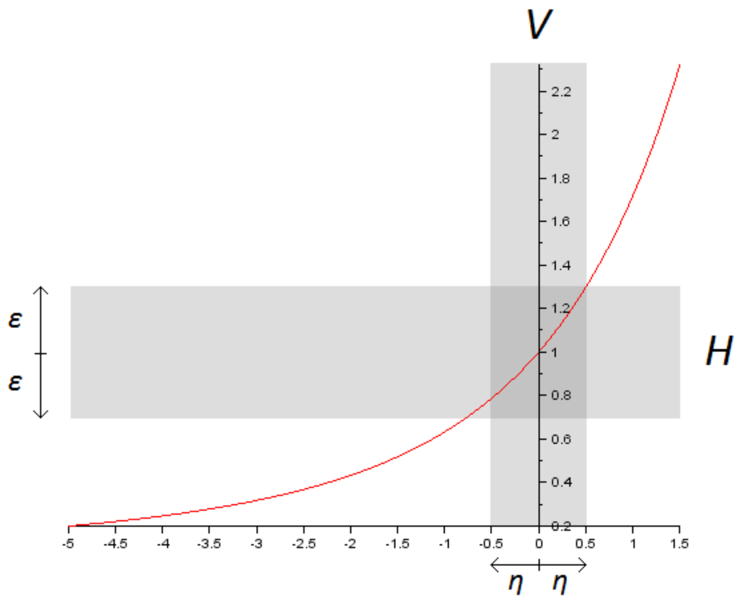
Limite finie en un point

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On cherche à connaître le comportement de f au voisinage de 0.
Commençons par donner quelques valeurs numériques de $f(x)$ lorsque x est proche de 0 :

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	0.6321	0.7869	0.9516	0.9950	0.9995	1.0005	1.0050	1.0517	1.2974	1.7182

On remarque que, plus x prend des valeurs proches de 0, plus $f(x)$ prend des valeurs proches de 1.

Cela se voit aussi graphiquement : quelle que soit la largeur de la bande horizontale H centrée sur la droite $y = 1$, il existe une bande verticale V centrée sur la droite $x = 0$ telle que tous les points de la représentation graphique de f dont les abscisses sont dans V ont des ordonnées situées dans H.



On dit alors que la fonction f a pour **limite** 1 en 0 ou que f **converge** vers 1 lorsque x tend vers 0.

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.

- On dit que f admet une **limite finie** en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- Dans ce cas, ℓ est **unique** et on notera : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Propriété 1 (Limite en un point où f est définie)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.
Si f est **définie au point** x_0 et si f **admet une limite finie en** x_0, alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.

- On dit que f admet une **limite finie à gauche** en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 par valeurs strictement inférieures. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

  Dans ce cas, ℓ est unique et on notera : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$.

- On dit que f admet une **limite finie à droite** en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 par valeurs strictement supérieures. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0, x_0 + \eta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

  Dans ce cas, ℓ est **unique** et on notera : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$.

Propriété 2 (Limites finies à gauche et à droite)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.
Si f admet des limites finies à gauche et à droite en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, alors f n'admet pas de limite finie en x_0.

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.
Si f admet des limites finies à gauche et à droite en x_0 et si celles-ci sont égales, cette valeur commune est appelée **limite épointée** de f en x_0 et notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$.
Dans ce cas, on a alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Remarque. Cette notion peut être utile lorsqu'on définit de manière arbitraire une fonction en un point. Dans ce cas, la fonction peut admettre une limite épointée sans pour autant admettre de limite. Par exemple :

- Si $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 1$ et g n'admet pas de limite en 0 (car $g(0) = 2$).

- Si $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$.

Limite infinie en un point

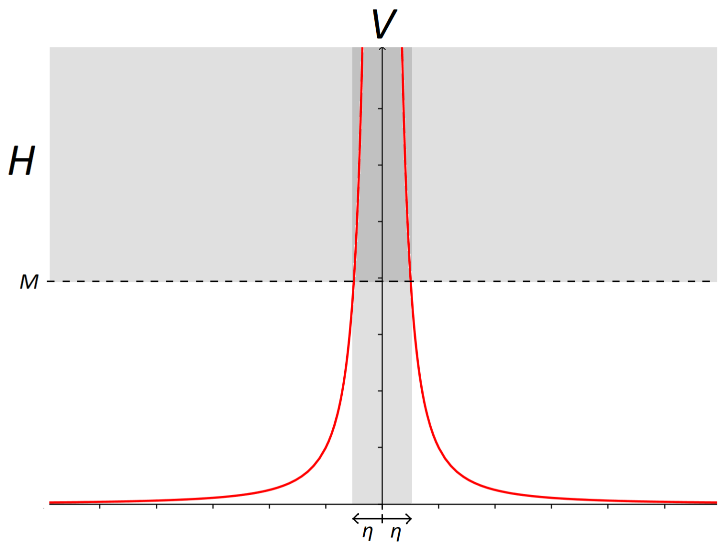
Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On cherche à connaître le comportement de f au voisinage de 0.

Commençons par donner quelques valeurs numériques de $f(x)$ lorsque x est proche de 0 :

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	1	4	100	10000	1000000	1000000	10000	100	4	1

On remarque que, plus x prend des valeurs proches de 0, plus $f(x)$ prend de grandes valeurs.

Cela se voit aussi graphiquement : quelle que soit la bande horizontale H, il existe une bande verticale V centrée sur la droite $x = 0$ telle que tous les points de la représentation graphique de f dont les abscisses sont dans V ont des ordonnées situées dans H.



On dit alors que la fonction f a pour **limite** $+\infty$ en 0 ou que f **diverge** vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.

- On dit que f **diverge** vers $+\infty$ en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0. Autrement dit :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ f(x) > M.$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que f **diverge** vers $-\infty$ en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0. Autrement dit :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ f(x) < -M.$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Il existe aussi une notion de limite infinie à gauche et à droite en un point :

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.

- f **diverge** vers $+\infty$ à **gauche** en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 par valeurs strictement inférieures. Autrement dit :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0[,\ f(x) > M.$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$.

- f **diverge** vers $+\infty$ à **droite** en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 par valeurs strictement supérieures. Autrement dit :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0, x_0 + \eta[,\ f(x) > M.$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$.

On définira de la même façon $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.2 Limite à l'infinie

Limite finie à l'infinie

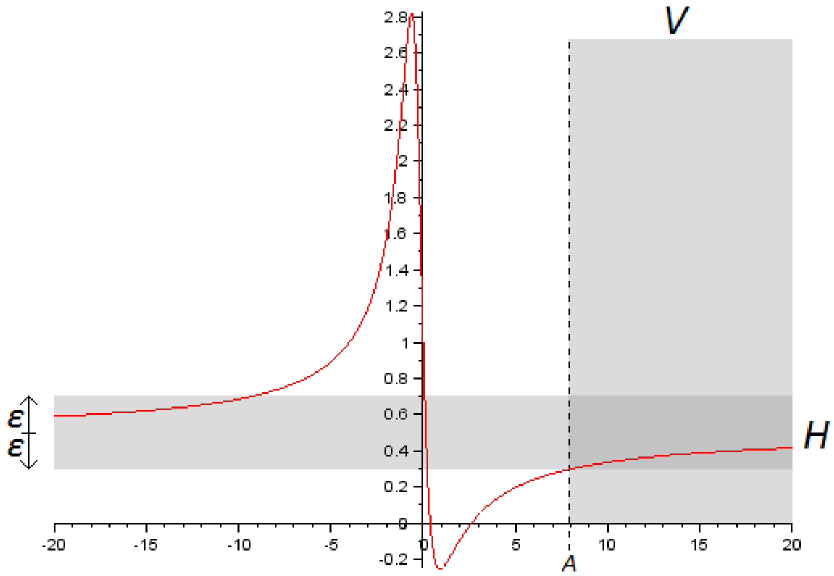
Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$. On cherche à connaître le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Voici quelques valeurs numériques de $f(x)$ lorsque x prend de grandes valeurs :

x	10	20	30	40	50	75	100	1000	10000
$f(x)$	0.6208	0.5615	0.5412	0.5310	0.5248	0.5165	0.5124	0.5012	0.5001

On remarque que plus x est grand, plus $f(x)$ a des valeurs proches de $\frac{1}{2}$.

Cela se voit aussi graphiquement : quelle que soit la largeur de la bande horizontale H centré sur la droite $y = \frac{1}{2}$, il existe une bande verticale V tel que tous les points de la représentation graphique de f dont les abscisses sont dans V ont des ordonnées situées dans la bande H.



On dit alors que f admet $\frac{1}{2}$ pour **limite** en $+\infty$ ou que f **converge** vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il est possible de faire une étude similaire au voisinage de $-\infty$. On peut alors montrer que f **converge** aussi vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Définition.

Soit f une fonction.

- Supposons que f est définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f admet une **limite finie** en $+\infty$ s'il existe un réel ℓ tel que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit suffisamment grand. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x > A,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

  Dans ce cas, ℓ est **unique** et on notera : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

- Supposons que f est définie au voisinage de $-\infty$. On dit que f admet une **limite finie** en $-\infty$ s'il existe un réel ℓ tel que $f(x)$ peut être rendu aussi proches que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit suffisamment petit. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x < A,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

  Dans ce cas, ℓ est **unique** et on notera : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

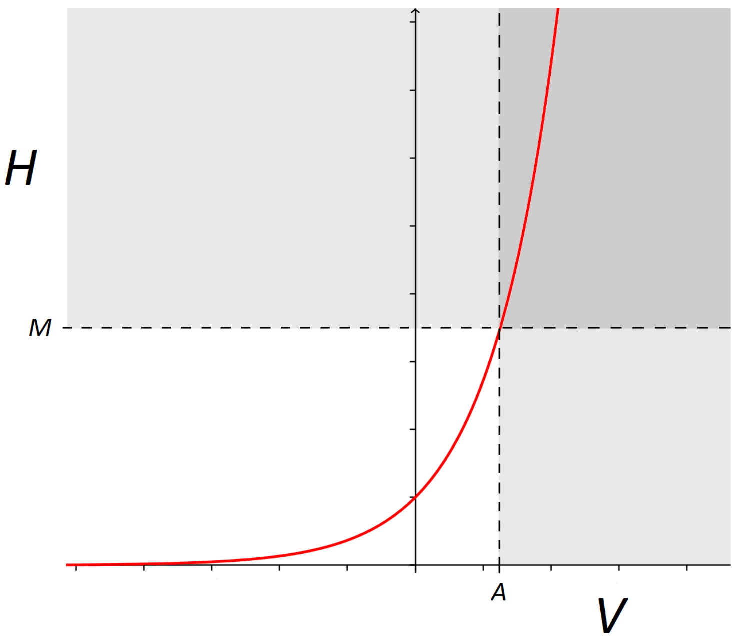
Limite infinie à l'infinie

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \exp(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. On cherche à connaître le comportement de f au voisinage de $+\infty$.
Voici quelques valeurs numériques de $f(x)$ lorsque x prend de grandes valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	10	100	1000
$f(x)$	1	2.7182	7.3890	20.0855	54.5981	148.4131	22026.46	$2.688D + 43$	Inf

On remarque que plus x est grand, plus $f(x)$ prend de grandes valeurs.

Cela se voit aussi graphiquement : quelle que soit la bande horizontale H, il existe une bande verticale V telle que tous les points de la représentation graphique de f dont les abscisses sont dans V ont des ordonnées situées dans H.



On dit alors que la fonction f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ ou que f **diverge** vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Définition.

Soit f une fonction.

- Supposons que f est définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f **diverge** vers $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand. Autrement dit :

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x > A,\ f(x) > M.$$

Dans ce cas, on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$. On dit que f **diverge** vers $+\infty$ en $-\infty$ si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment petit. Autrement dit :

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x < A,\ f(x) > M.$$

Dans ce cas, on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

On définira de la même façon $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

1.3 Limites usuelles

Propriété 3 (Limites des fonctions puissances entières)

(1) Si n est un entier naturel non nul, alors :

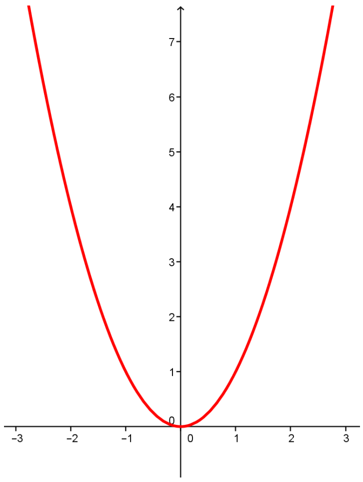
$$(i)\ \lim_{x\to\pm\infty} x^{2n} = +\infty \qquad (ii)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \qquad (iii)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$$

(2) Si n est un entier naturel, alors :

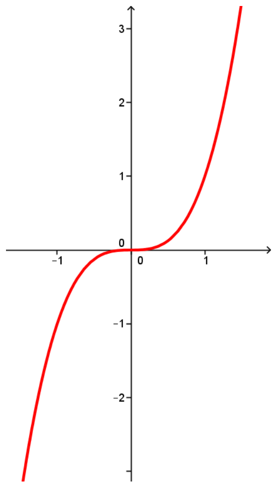
$$(i)\ \lim_{x\to\pm\infty} x^{2n+1} = \pm\infty \qquad (ii)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{2n+1}} = 0 \qquad (iii)\ \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x^{2n+1}} = \pm\infty$$

Interprétation graphique. On retrouve ces limites avec les courbes représentatives de ces fonctions :

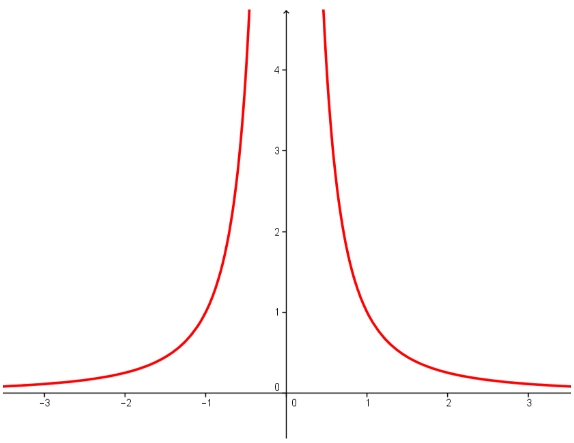
Fonctions de la forme $x \mapsto x^{2n}$ $(n > 0)$:



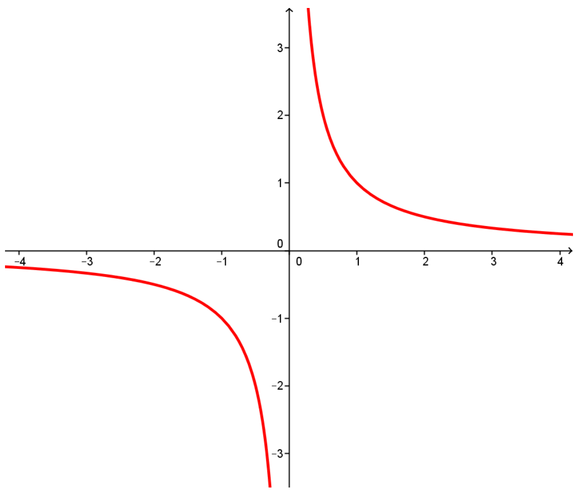
Fonctions de la forme $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \geq 0)$:



Fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ $(n > 0)$:



Fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $(n \geq 0)$:



Propriété 4 (Limites des fonctions logarithme, exponentielle et puissances)

(1) La **fonction logarithme** est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

(2) La **fonction exponentielle** est définie sur $\mathbb{R}$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

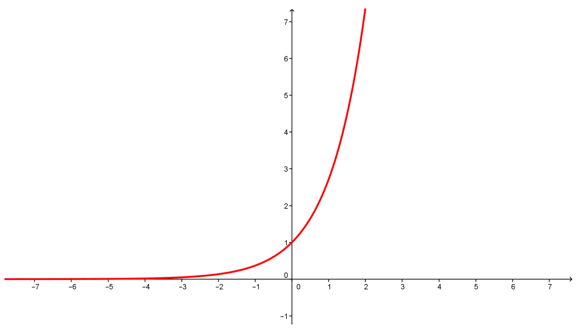
(3) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la **fonction puissance** $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.

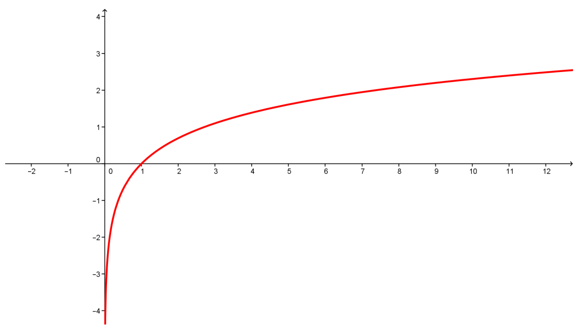
En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Interprétation graphique. Ici encore, on retrouve ces limites en observant les courbes représentatives des fonctions exponentielle, logarithme et puissances :

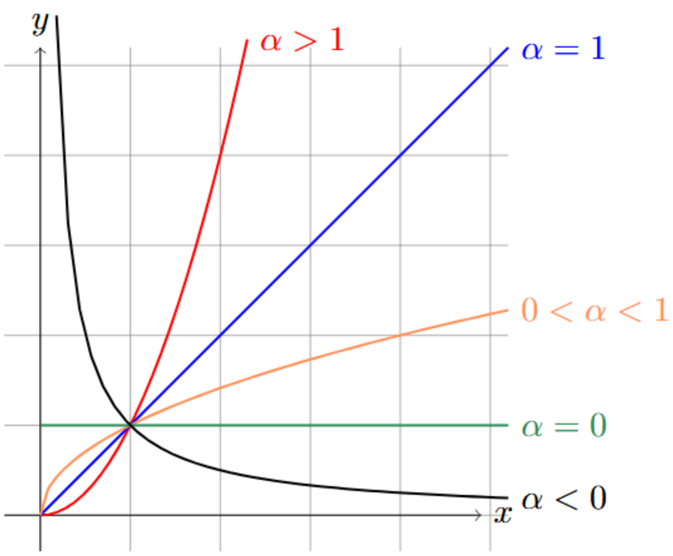
Fonction exponentielle :



Fonction logarithme :



Fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$:



2 Théorèmes sur les limites

2.1 Opérations sur les limites

Le théorème suivant rassemble toutes les règles de calcul sur les limites. La notation F.I. signifie **forme indéterminée** ce qui signifie qu'aucun théorème ne nous permet de conclure en général.

Théorème 5 (Opérations sur les limites)

Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.

(1) Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(2) Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(3) Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, $\ell' \neq 0$,

si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	ℓ'	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas particulier où ℓ' est nul,

si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Les **formes indéterminées**, c'est-à-dire les cas où on ne peut pas conclure, sont symboliquement représentés par :

$$\boxed{\infty - \infty, \quad 0 \times (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}}$$

Méthode.
Pour calculer la limite d'une fonction :

1. On détermine la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de la fonction.
2. Si on n'obtient pas de **forme indéterminée** :

   On peut alors calculer directement la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites (en distinguant éventuellement limite à gauche et limite à droite).
3. Si on obtient une **forme indéterminée** :

   On transforme l'expression de la fonction pour lever l'indétermination. Plus précisément :

   - Dans le cas $\infty - \infty$: on factorisera par le terme dominant ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).
   - Dans les cas $0 \times (\pm\infty)$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$: on factorisera par le terme dominant.
   - Dans le cas $\dfrac{0}{0}$: on factorisera l'expression ou on multipliera par la quantité conjuguée (s'il y a des racines carrées).

   On calcule ensuite la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites.

Exemples. Déterminer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2 - x + 1}$

- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}}{x - \ln(x)}$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{2x^2 + 1}$

- $\displaystyle\lim_{x\to-2} \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}$

- $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^3+1}$

- $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

- $\lim_{x \to 1} (x-1)^x$

Méthode.
L'étude de la limite de f en un point x_0 à l'aide des limites à gauche et à droite est pertinente si on est dans une des situations suivantes :

- $f(x)$ s'exprime différemment à gauche et à droite de x_0.
- Il y a un dénominateur dans l'expression de $f(x)$ qui s'annule et change de signe en x_0.

Exemples. Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ avec $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x^2+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\ln(x)}$

Pour lever certaines formes indéterminées, il faut connaitre le comportement asymptotique des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres. C'est ce qu'on appelle les **croissances comparées** :

Propriété 6 (Croissances comparées)

Pour tous $\alpha, \beta > 0$,

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$ (3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

Autrement dit, l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme.

Exemples. Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 2x - 1}{x^2 + \ln(x)}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \ln(x)\right) e^{-x}$

- $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - x) \ln(x)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + x)}{x^2}$

2.2 Composition des limites

Théorème 7 (Composition des limites)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$ de sorte que $g \circ f$ soit définie. Alors :

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} g \circ f(x) = c.$$

Méthode.

Ainsi, pour calculer une limite $c = \lim_{x \to a} g \circ f(x)$:

1. On calcule $b = \lim_{x \to a} f(x)$.
2. On pose le changement de variable $X = f(x)$ et on calcule $c = \lim_{X \to b} g(X)$.

On utilisera cette méthode pour faire apparaitre une croissance comparée.

Exemples. Déterminer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{(\ln(x))^2}$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\ln(\ln(x))}$

2.3 Propriétés liées à l'ordre

Propriété 8 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $x_0 \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Considérons f et g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0.
Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Attention.

Cette propriété n'est pas valable si les inégalités sont strictes. Par exemple,

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x} > 0 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} > 0.$$

On travaillera donc **toujours** avec des **inégalités larges**.

Propriété 9 (d'encadrement)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $x_0 \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On note f, g, h trois fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0.
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Exemple. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x+1}$

Propriété 10 (Technique de majoration ou de minoration)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (ou éventuellement une borne de I). On note f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0.

(1) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

(2) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor + 1}{\sqrt{x}}$.

2.4 Cas des fonctions monotones

Propriété 11 (de limite monotone)

Soit f une fonction **croissante** sur un intervalle $[a, b[$. Alors f admet une limite en b.
Plus précisément,

- si f est majorée sur $[a, b[$, alors f admet une limite finie en b.
- si f n'est pas majorée sur $[a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$

Remarque. On peut adapter cette propriété aux fonctions croissantes ou décroissantes sur des intervalles $[a, b[$ ou $]a, b]$:

	f **croissante**	f **décroissante**
f **majorée**	f admet une limite finie en b	f admet une limite finie en a
f **non majorée**	$\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
f **minorée**	f admet une limite finie en a	f admet une limite finie en b
f **non minorée**	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$

3 Asymptotes

3.1 Asymptotes verticales

Définition.

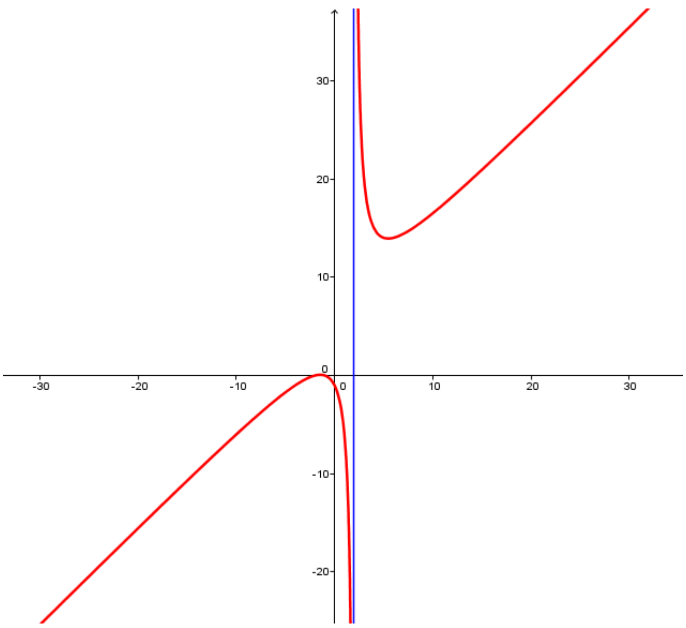
Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Si la limite (à droite ou à gauche) de f en x_0 est infinie, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation.

Voici la représentation graphique de $\mathcal{C}_f$ (en rouge) et de la droite $x = 2$ (en bleu) :



3.2 Asymptotes horizontales

Définition.

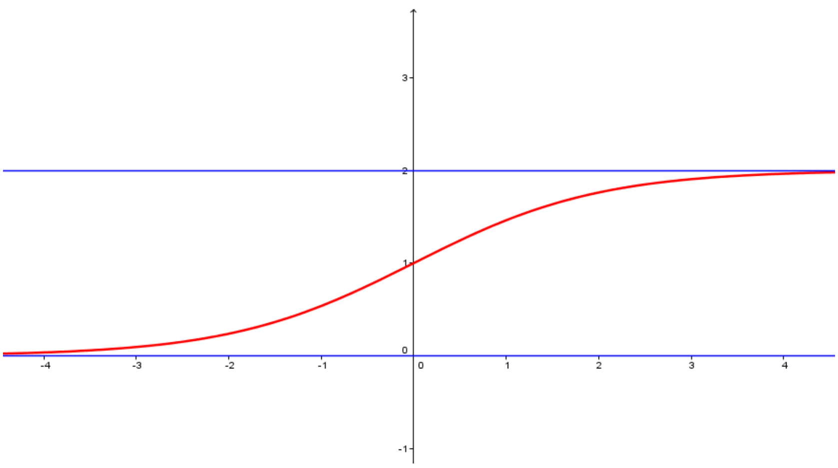
Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = \ell$.
On définit de la même façon une asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, préciser son équation.

Voici la représentation graphique de $\mathcal{C}_f$ (en rouge) et des droites $y = 0$ et $y = 2$ (en bleu) :



3.3 Asymptotes obliques

Définition.

Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $a, b \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0,$$

alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote oblique** au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = ax + b$.

Méthode.

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, l'étude de l'écart algébrique $\varepsilon(x) = f(x) - (ax+b)$ présente un double intérêt :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$, alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, c'est-à-dire que Δ et $\mathcal{C}_f$ se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre lorsque x tend vers $+\infty$.
- Le signe de $\varepsilon(x)$ donne la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 11x - 3}{3(x^2+1)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ d'équation $y = \dfrac{2}{3}x - 1$.

3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.

Voici la représentation graphique de $\mathcal{C}_f$ (en rouge) et de Δ (en bleu) :