Chapitre 6

Systèmes linéaires

1 Généralités **2**
- 1.1 Définitions 2
- 1.2 Opérations élémentaires 2
- 1.3 Systèmes échelonnés et triangulaires 3

2 Résolution des systèmes linéaires **3**
- 2.1 Méthode du pivot de Gauss 3
- 2.2 Exemples 4
- 2.3 Forme générale des solutions 7

Compétences attendues.

✓ Mettre un système linéaire sous forme échelonnée à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

✓ Obtenir l'ensemble des solutions d'un système linéaire échelonné.

✓ Obtenir la famille génératrice de l'ensemble des solutions dans le cas d'un système linéaire sans second membre.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition.

On appelle **système linéaire** de n **équations** à p **inconnues** réelles $x_1, x_2, \ldots, x_p$, un système de la forme suivante :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_i sont des nombres réels. La i-ème équation du système est notée L_i et est appelée i-ème ligne du système (S).
On cherche à **résoudre** (S), c'est-à-dire à trouver tous les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ vérifiant les n équations de (S).

Cas particulier.

- Si $n = p$ (c'est-à-dire s'il y a autant d'équations que d'inconnues), on parle de **système carré** d'ordre n.
- Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = 0$, on parle de **système homogène** ou **sans second membre**.

Définition.

- Un système est dit **compatible** (ou **possible**) s'il admet au moins une solution et **incompatible** (ou **impossible**) s'il n'admet pas de solution.
- On appelle **système de Cramer** tout système linéaire qui admet une unique solution.

Définition.

Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires à p inconnues (n'ayant pas nécessairement le même nombre d'équations). (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils admettent le même ensemble de solutions, c'est-à-dire si :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_p) \text{ est solution de } (S').$$

1.2 Opérations élémentaires

La résolution d'un système linéaire (S) va consister à transformer (S) en un système équivalent (S') plus facile à résoudre. Pour cela, on utilise des **opérations élémentaires** sur les lignes :

Propriété 1 (Opérations élémentaires)

Soit (S) un système linéaire de n équations $L_1, L_2, \ldots, L_n$ à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$.
On obtient un système (S') équivalent à (S) en effectuant les opérations suivantes, dites **opérations élémentaires** :

- Supprimer une équation nulle, c'est-à-dire de la forme $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_p = 0$.
- Échanger la i-ème ligne L_i et la j-ème ligne L_j. On notera $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Remplacer la i-ème ligne L_i par $\lambda L_i + \mu L_j$ ($\lambda \neq 0$ et $i \neq j$). On notera $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$.

Attention.

Pour l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, il faut que λ soit **non nul**. Sinon le système obtenu (S') ne sera pas équivalent au système de départ (S).

1.3 Systèmes échelonnés et triangulaires

Définition.

Un système linéaire (S) de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ est un **système échelonné** si $n \leq p$ et si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, p]\!]$ avec $i > j$, $a_{i,j} = 0$. Autrement dit, (S) est **échelonné** s'il est de la forme :

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & a_{1,4}x_4 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & a_{2,4}x_4 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & a_{3,3}x_3 & + & a_{3,4}x_4 & + & \dots & + & a_{3,p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_p \end{array}\right.$$

Définition.

Un système linéaire (S) est un **système triangulaire** s'il est **carré** et **échelonné**. Autrement dit, (S) est **triangulaire** s'il est de la forme :

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{3,3}x_3 & + & \dots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

2 Résolution des systèmes linéaires

2.1 Méthode du pivot de Gauss

Méthode.

Considérons un système de n équations ($n \geq 2$), où toutes les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ apparaissent :

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Pour résoudre (S), on applique la méthode du **pivot de Gauss** suivante :

(1) Si (S) contient au moins une équation impossible, alors la résolution est terminée et (S) est impossible.

(2) Si (S) contient des équations nulles, on se ramène à un système équivalent en les supprimant.

(3) Si $a_{1,1} = 0$, on permute les lignes du système (ce qui donne un système équivalent) pour que l'inconnue x_1 soit présente dans la première équation. On a alors $a_{1,1} \neq 0$ et c'est le **premier pivot** de Gauss.

(4) Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on effectue l'opération $L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$. On obtient un système équivalent (S') dans lequel les $n-1$ dernières lignes ne contiennent plus l'inconnue x_1 :

$$(S') : \left\{\begin{array}{cccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1') \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a'_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2') \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a'_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n') \end{array}\right.$$

Notons (S'') le système linéaire formé des $n-1$ dernières lignes de (S') (les lignes $L_2', L_3', \dots, L_n'$) aux inconnues $x_2, x_3, \dots, x_n$.

(5) On applique à (S'') le même traitement que celui que l'on à fait subir à (S).

En suivant cette méthode du **pivot de Gauss**, on obtient en un nombre fini d'étapes un système équivalent à (S) qui est soit impossible, soit échelonné. On a ainsi montré la :

Propriété 2 (du pivot de Gauss)

Tout système linéaire est **équivalent** soit à un système **impossible**, soit à un système **échelonné**.

2.2 Exemples

Exemple 1. Résoudre le système suivant :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 & & (L_1) \\ x & - & y & - & z & = & 1 & & (L_2) \\ 2x & & & + & 2z & = & 6 & & (L_3) \end{array} \right.$$

Exemple 2. Résoudre le système suivant :

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} 2x & + & y & - & z & + & 2t & + & 2u & = & 2 & & (L_1) \\ 4x & + & 2y & + & z & - & 2t & + & 4u & = & 1 & & (L_2) \\ 4x & + & y & + & z & + & 4t & & & = & 4 & & (L_3) \end{array} \right.$$

Exemple 3. Résoudre le système suivant :

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x & + & 2y & - & z & + & 2t & + & u & = & 1 & & (L_1) \\ x & + & 2y & + & z & + & 6t & + & 3u & = & -1 & & (L_2) \\ 2x & + & 4y & & & + & 9t & + & 8u & = & 0 & & (L_3) \\ 2x & + & 4y & - & z & + & 6t & + & 3u & = & 1 & & (L_4) \end{array}\right.$$

Exemple 4. Résoudre le système suivant :

$$(S_4) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & - & z & - & t & = & 1 & \quad (L_1) \\ x & + & y & + & z & - & 2t & = & 3 & \quad (L_2) \\ 2x & - & y & + & 2z & - & t & = & 2 & \quad (L_3) \\ 3x & & & + & 3z & - & 3t & = & 6 & \quad (L_4) \end{array} \right.$$

2.3 Forme générale des solutions

Cas d'un système avec second membre

Théorème 3 (Solutions d'un système triangulaire)

Soit n un entier ≥ 2 et (S) le système triangulaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{3,3}x_3 & + & \dots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Si les **pivots** $a_{i,i}$ sont tous **non nuls**, alors le système (S) admet une **unique solution**. Autrement dit, (S) est un **système de Cramer**.

Preuve. Puisque $a_{n,n}$ est non nul, x_n est uniquement déterminé par la n-ème équation. Ensuite, puisque $a_{n-1,n-1}$ est non nul, la $n-1$-ème équation détermine de manière unique x_{n-1} et ainsi de proche en proche, on détermine de manière unique $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1$. Ceci montre que (S) admet une unique solution et est donc un système de Cramer. $\square$

Définition.

On considère un **système échelonné** (S) à n équations et p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ de la forme suivante :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & a_{1,4}x_4 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,j_2}x_{j_2} & + & \dots & & & & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & a_{3,j_3}x_{j_3} & + & \dots & & \dots & + & a_{3,p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,j_n}x_{j_n} & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_p \end{array} \right.$$

avec

$$1 < j_2 < j_3 < \dots < j_n \leq p \text{ et } a_{1,1} \neq 0,\ a_{2,j_2} \neq 0, \dots,\ a_{n,j_n} \neq 0.$$

Les inconnues $x_1, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}$ figurant en tête de chaque équation s'appellent les **inconnues principales** de (S) et si $n < p$, les autres inconnues s'appellent les **inconnues secondaires**.

Théorème 4 (Solutions d'un système échelonné)

Soient n et p deux entiers tels que $2 \leq n < p$ et (S) le système échelonné suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & a_{1,4}x_4 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,j_2}x_{j_2} & + & \dots & & & & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & a_{3,j_3}x_{j_3} & + & \dots & & \dots & + & a_{3,p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,j_n}x_{j_n} & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_p \end{array} \right.$$

avec

$$1 < j_2 < j_3 < \dots < j_n \leq p \text{ et } a_{1,1} \neq 0,\ a_{2,j_2} \neq 0, \dots,\ a_{n,j_n} \neq 0.$$

Si on passe les **inconnues secondaires** dans le second membre du système, les n **inconnues principales** $x_1,\ x_{j_2}, \dots,\ x_{j_n}$ sont déterminées de manière unique (en fonction des **inconnues secondaires**) par un système triangulaire d'ordre n dont tous les pivots sont non nuls.

(S) admet donc des solutions dépendant des $p-n$ **inconnues secondaires**. On dit alors que le système est **indéterminé** et plus précisément qu'il admet une **indétermination** d'ordre $p-n$.

Ainsi, pour un système linéaire avec second membre, trois cas sont possibles :

- Il admet **aucune solution** (le système est impossible).
- Il admet **une unique solution** (le système est de Cramer),
- Il admet **une infinité de solutions** (le système est indéterminé).

Cas d'un système sans second membre

Un système sans second membre à p inconnues possède au moins une solution, le p-uplet $(0, 0, \dots, 0)$. Il y a donc seulement deux cas possibles :

- Il admet **une unique solution** égale à $(0, 0, \dots, 0)$ (le système est de Cramer),
- Il admet **une infinité de solutions** (le système est indéterminé).

Propriété 5 (Structure des solutions d'un système sans second membre)

Soit (S) un système linéaire sans second membre qui admet une **indétermination** d'ordre $p - n$.

(1) L'ensemble des solutions de (S) peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-n}) = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{p-n} e_{p-n} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{p-n} \in \mathbb{R}\}.$$

où $(e_1, \dots, e_{p-n})$ est appelée la **famille génératrice** de l'ensemble des solutions.

(2) L'ensemble des solutions de (S) est stable par **combinaison linéaire** : la somme de deux solutions ou le produit par un scalaire d'une solution est encore une solution. On dit que c'est un **espace vectoriel**.

Exemple. Résoudre le système sans second membre suivant et donner une famille génératrice de l'ensemble des solutions :

$$(S_5) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & & & & + & 3u & = & 0 \\ & & & & z & & + & 5u & = & 0 \\ & & & & & t & - & 2u & = & 0 \end{array} \right.$$