Chapitre 7

Logique, ensembles et applications

Compétences attendues.

- ✓ Utiliser correctement les quantificateurs universel et existentiel, les connecteurs logiques "et" et "ou", faire la distinction entre "condition nécessaire" et "condition suffisante", formuler la négation d'une proposition.
- ✓ Reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.
- ✓ Maitriser le **raisonnement par récurrence**.
- ✓ Connaitre le vocabulaire élémentaire sur les ensembles : appartenance, inclusion, réunion, intersection, complémentaire...
- ✓ Calculer la composer de deux applications.
- ✓ Démontrer qu'une application est injective, surjective, bijective.
- ✓ Déterminer la bijection réciproque d'une application bijective.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Éléments de logique

1.1 Quantificateurs universel et existentiel

Notations. Rappelons les notations des quantificateurs universel et existentiel que nous avons déjà rencontrées dans les chapitres précédents :

- Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie *quel que soit* x*...*
- Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie *il existe (au moins) un* x*...*
- Le symbole $\exists!$ placé devant une variable x signifie *il existe un unique* x*...*

Définition.

On appelle **proposition** toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse.

Exemples. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\mathcal{P}_1$: "$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \neq 5$"

- $\mathcal{P}_2$: "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$"

- $\mathcal{P}_3$: "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 < 0$"

- $\mathcal{P}_4$: "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 5x + 4 = 0$"

Remarque. Lorsque qu'une **proposition** dépend d'une variable x, on pourra la noter $\mathcal{P}(x)$. Par exemple,

- Si on pose $\mathcal{P}(x)$: "$x \geq 1$", alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(-1)$ est fausse.
- Si on pose $\mathcal{P}(n)$: "*n est un nombre premier*", alors $\mathcal{P}(7)$ est vraie, $\mathcal{P}(8)$ est fausse.

1.2 Opérations sur les propositions logiques

Définition.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition ($\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{Q}$), appelée **conjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.
- La proposition ($\mathcal{P}$ **ou** $\mathcal{Q}$), appelée **disjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

Exemples.

- Soient $\mathcal{P}(x)$: "$x \leq 2$" et $\mathcal{Q}(x)$: "$x < 5$". Déterminer ($\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$) et ($\mathcal{P}(x)$ ou $\mathcal{Q}(x)$).

- Soient $\mathcal{P}(n)$: "*n est un nombre premier*" et $\mathcal{Q}(n)$: "$n \leq 10$". Déterminer ($\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$) et ($\mathcal{P}(n)$ ou $\mathcal{Q}(n)$).

Définition.

La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée (**non** $\mathcal{P}$), et appelée **négation** de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple. Les deux propositions suivantes sont clairement contraires l'une de l'autre :

- Quel que soit x, $\mathcal{P}(x)$ est vraie, ou $\forall x$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- Il existe un x tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux, ou $\exists x$, $\mathcal{P}(x)$ est faux.

On peut généraliser et on retiendra qu'on procède comme suit pour nier une proposition :

Méthode.

Pour nier une proposition, on permute les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, puis on nie la conclusion.

Exemples. Écrire la négation des propositions suivantes :

- $\mathcal{P}_1$: "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = 0$"
- $\mathcal{P}_2$: "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y$"
- $\mathcal{P}_3$: "$\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x + y \leq 0$"
- $\mathcal{P}_4$: "$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^-,\ x < n$"

Remarque. Le contraire de la proposition ($\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{Q}$) est la proposition ((**non** $\mathcal{P}$) **ou** (**non** $\mathcal{Q}$)). Le contraire de la proposition ($\mathcal{P}$ **ou** $\mathcal{Q}$) est la proposition ((**non** $\mathcal{P}$) **et** (**non** $\mathcal{Q}$)). Ces propriétés sont appelées les **lois de Morgan**.

Exemple. Considérons les propositions $\mathcal{P}(x)$: "$x \leq 2$" et $\mathcal{Q}(x)$: "$x < 5$". Déterminer (**non** ($\mathcal{P}(x)$ **et** $\mathcal{Q}(x)$)), (**non** ($\mathcal{P}(x)$ **ou** $\mathcal{Q}(x)$)), ((**non** $\mathcal{P}(x)$) **ou** (**non** $\mathcal{Q}(x)$)) et ((**non** $\mathcal{P}(x)$) **et** (**non** $\mathcal{Q}(x)$)). Les lois de Morgan sont-elles bien vérifiées ?

1.3 Implications logiques

Définition.

Étant données deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$ et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie.

Exemple. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $"x \leq 3" \Rightarrow "x \in \mathbb{R}^+"$
- $"\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)" \Rightarrow "\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)"$
- $"\exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2" \Rightarrow "y \in \mathbb{R}^+"$

Vocabulaire. Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on dit $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** de $\mathcal{P}$. Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, **il suffit que** $\mathcal{P}$ soit vraie. Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, **il faut que** $\mathcal{Q}$ soit vraie.

Définition.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- L'implication (**non** $\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ (**non** $\mathcal{P}$) est appelée la **contraposition** ou la **contraposée** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
- L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée l'**implication réciproque** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Exemple. Donner la contraposée et la réciproque des implications de l'exemple précédent. On précisera dans chacun des cas si l'implication obtenue est vraie ou fausse.

Méthode.

Trois types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre pour démontrer une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

(1) **Raisonnement direct :** $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
On montre que si la proposition $\mathcal{P}$ est vraie alors la proposition $\mathcal{Q}$ est vraie.

(2) **Raisonnement par contraposition :** (**non** $\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ (**non** $\mathcal{P}$)
Si la proposition (**non** $\mathcal{Q}$) implique la proposition (**non** $\mathcal{P}$), alors $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$.

(3) **Raisonnement par l'absurde :** $\mathcal{P}$ et (**non** $\mathcal{Q}$) conduisent à une contradiction.
Si les propositions $\mathcal{P}$ et (**non** $\mathcal{Q}$) conduisent à une contradiction, alors $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$.

Exemples.

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

2. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

3. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Définition.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ est **équivalente** à $\mathcal{Q}$ et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire. Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie **si et seulement si** $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** de $\mathcal{Q}$. Ou encore que pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, **il faut et il suffit que** $\mathcal{P}$ soit vraie.

Méthode.

Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Exemple. On a vu que à l'exemple précédent que :

- Si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
- Si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc n est pair si et seulement si n^2 est pair.

1.4 Raisonnement par récurrence

Théorème 1 (Principe de récurrence)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ \forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(n+1) \ \text{ (hérédité)} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Méthode.

Pour montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- Initialisation : On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : On considère un entier $n \geq n_0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemples.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

- Montrer que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \leq n!$.

2 Ensembles

2.1 Ensembles, sous-ensembles

Définition.

- Un **ensemble** E est une collection ou un groupement d'objets distincts. Les objets x de E s'appellent les **éléments** de E.

  L'unique ensemble ne contenant aucun élément est noté $\emptyset$ et est appelé l'**ensemble vide**.

- Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on dit que x **appartient à** E ou que x **est dans** E et on écrit $x \in E$.

  Dans le cas contraire, si x n'est pas un élément de E, on dit que x **n'appartient pas à** E ou que x **n'est pas dans** E et on écrit $x \notin E$.

Pour définir un ensemble, on peut le décrire :

- par extension, en donnant entre accolades la listes de ses éléments.

  Exemple. $E = \{0, 2, 4, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.

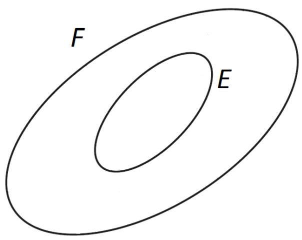
- par compréhension, en donnant toujours entre accolades une propriété caractéristique des éléments.

  Exemple. $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ impair } \}$ est l'ensemble des entiers relatifs impairs.

Définition.

Soient E et F deux ensembles.
On dit que E est **inclus** dans F et on écrit $E \subset F$ si tout élément de E est un élément de F.

Diagramme de Venn. Ce sont des représentations schématiques d'ensembles. Par exemple, on peut schématiser l'inclusion $E \subset F$ de la façon suivante :



Méthode.

Pour montrer que $E \subset F$, on prend un élément x quelconque de E et on prouve que x appartient à F.

Exemples.

- Donner les différentes relations d'inclusion entre les ensembles suivants :

$$A = \{1, 5, a, \Delta\}\,,\quad B = \{1, a, \Delta\}\,,\quad C = \{1, 5\}\,,\quad D = \{5, a, \Delta\}\,,\quad E = \{1, 2, 5, \Delta\}$$

- Soit $E = \{\text{suites géométriques de raison } -1 < q < 1\}$ et $F = \{\text{suites convergentes}\}$. Montrer que $E \subset F$.

Définition.

Soit E un ensemble.

- Un ensemble A est une **partie** de E ou un **sous-ensemble** de E si A est inclus dans E.
- L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. En particulier, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Attention.

Il est important de bien distinguer les deux symboles $\in$ et $\subset$: le premier concerne un élément appartenant à un ensemble, le second concerne un ensemble inclus dans un autre ensemble.
Par exemple, la notation $A \subset E$ a la même signification que la notation $A \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple. Déterminer l'ensemble des parties de E lorsque :

- $E = \{a, b\}$

- $E = \{a, b, c\}$

Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont **égaux** et on note $E = F$ si et seulement si E et F ont les mêmes éléments.

Méthode.

Pour montrer que $E = F$, on peut procéder par double inclusion : on montre que $E \subset F$ et $F \subset E$.

Exemple. Soient $E = \big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \mid\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\big\}$ et $F = \big\{(\lambda + \mu 2^n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \mid\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$.
Montrer que les ensembles E et F sont égaux.

2.2 Union et intersection

Dans ce paragraphe, on considère un ensemble E.

Définition.

Soient A et B deux sous-ensembles de E.

- L'**intersection** de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par :

$$A \cap B = \{x \in E \ | \ x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

  En d'autres termes, l'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments **qui appartiennent à** A **et à** B.

- L'**union** de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par :

$$A \cup B = \{x \in E \ | \ x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

  En d'autres termes, l'union de A et de B est l'ensemble des éléments **qui appartiennent à** A **ou à** B. Le "ou" utilisé ici est inclusif : x est un élément de A ou un élément de B ou un élément de A et de B.

Diagrammes de Venn.

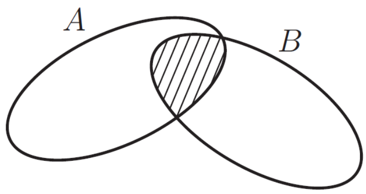


Schéma de $A \cap B$
(Cas où A et B ne sont pas disjoints)

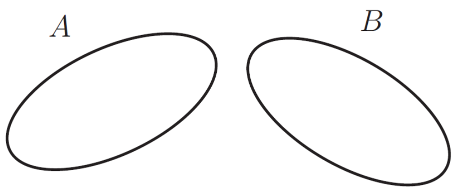


Schéma de $A \cap B$
(Cas où A et B sont disjoints)

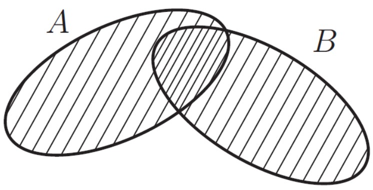


Schéma de $A \cup B$
(Cas où A et B ne sont pas disjoints)

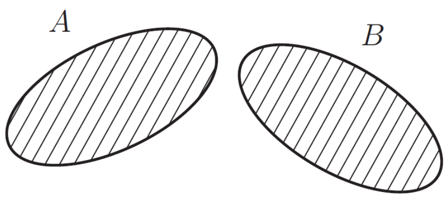


Schéma de $A \cup B$
(Cas où A et B sont disjoints)

Remarque. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors on a toujours les inclusions suivantes :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B,$$
$$A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Exemple. Soit $A =]-1, 1[$, $B = [-2, 0[$ et $C = [0, 5[$. Déterminer :

$$A \cap B, \ \ A \cup C, \ \ A \cap B \cap C, \ \ A \cup B \cup C, \ \ A \cap (B \cup C), \ \ A \cup (B \cap C), \ \ (A \cup B) \cap (A \cap C)$$

Propriété 2 (Propriétés algébriques de l'intersection et l'union)

(1) L'intersection et l'union sont **commutatives** : Pour toutes parties A, B de E,

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

(2) L'intersection et l'union sont **associatives** : Pour toutes parties A, B, C de E,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

$A \cap B \cap C$ est l'ensemble des éléments communs aux sous-ensembles A, B, C.

$A \cup B \cup C$ est l'ensemble des éléments qui sont dans l'un au moins des sous-ensembles A, B, C.

(3) E est **élément neutre** pour l'intersection : Pour toute partie A de E, $A \cap E = A$.

$\emptyset$ est **élément neutre** pour la réunion : Pour toute partie A de E, $A \cup \emptyset = A$.

(4) L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une de l'autre : Pour toutes parties A, B, C de E,

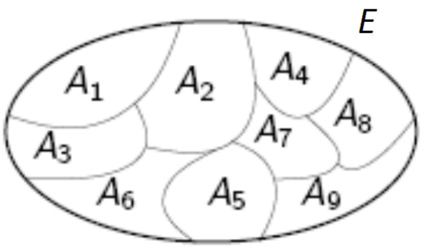
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Définition.

Une **partition d'un ensemble** E est un ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ constitué de parties de E vérifiant :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_k \neq \emptyset$ (aucun A_k ne doit être vide).
- $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$ (la réunion des A_k est égale à E).
- $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (on dit que les A_i sont deux à deux disjoints).

Diagramme de Venn. Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_9\}$ est une partition de E, on peut alors schématiser de la façon suivante :



Exemples.

- Les ensembles suivants sont-ils des partitions de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$?

$$\{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}, \qquad \{\{a, b\}, \{b, c\}\}, \qquad \{\{a\}, \{c\}\}, \qquad \{\{b\}, \{a, c\}\}.$$

- Donner toutes les partitions de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

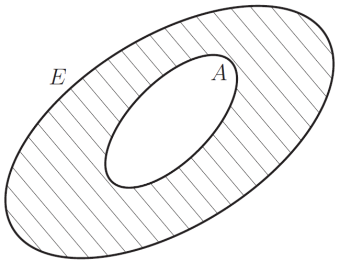
2.3 Complémentaire

Définition.

Soit A une partie de E. Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble, noté $\overline{A}$, de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. Autrement dit :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Diagramme de Venn.



Exemples.

- Si $E = [1, 10]$, donner le complémentaire des parties suivantes de E : $\emptyset, \{3\},]1, 8[, \{5\} \cup [6, 7[, E$.

- Si $E = \{a, b, c\}$, donner le complémentaire des parties suivantes de E : $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E$.

Propriété 3 (Propriétés algébriques du complémentaire)

Soient A et B deux parties de E.

(1) $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$.

(2) Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(3) Lois de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Remarque. Soient A et B deux parties de E. La **différence** de A avec B est l'ensemble, noté $A \setminus B$, de tous les éléments de A qui ne sont pas dans B. Autrement dit :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

On obtient les diagrammes de Venn suivants :

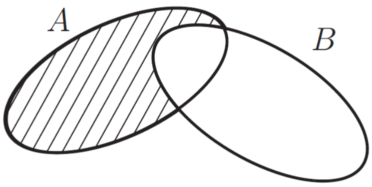


Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B \neq \emptyset$)

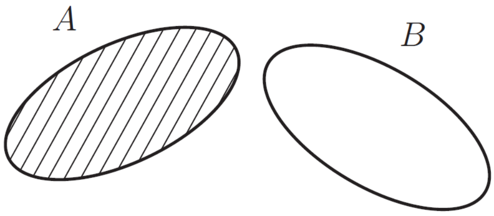


Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B = \emptyset$)

2.4 Produit cartésien

Définition.

Soient A et B deux parties de E. Le **produit cartésien** de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, constitué de tous les couples (x, y) où x est un élément de A et y un élément de B. On a donc :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Remarques.

1. La définition précédente se généralise. Si $n \geq 2$ et si $A_1, \ldots, A_n$ sont n sous-ensembles de E, le **produit cartésien** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est défini par :

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall\, i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i\}.$$

2. Lorsque $A = B$, on note : $A \times A = A^2$. Et plus généralement, on note : $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}} = A^n$.

Exemple. Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{0, 1, 3\}$, déterminer les ensembles $A \times A$, $A \times B$ et $B \times B$.

3 Applications

3.1 Définitions

Définition.

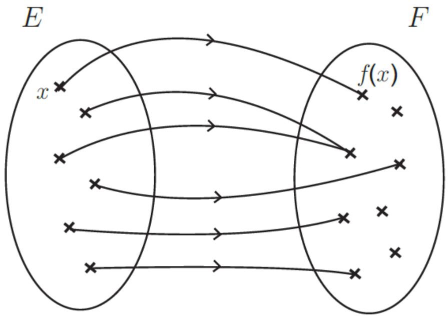
Soient E et F deux ensembles.

- On dit que f est une **application** au départ de E et à valeurs dans F si, à tout élément x de E, f associe un unique élément y de F. Cet élément y est appelé l'**image** de x par f et noté $f(x)$.
- On écrira alors :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

- Soit y est un élément de F. On dit qu'un élément x de E est un **antécédent** de y par f si $y = f(x)$.

Représentation sagittale.



Exemple. Considérons l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+2 \end{array} \right.$

- Déterminer les images de -2, 0, 2 et 5 par f.

- Déterminer les antécédents de 0, 2, 5 et 11 par f.

Définition.

Soient $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ deux applications. On dit f_1 et f_2 sont **égales** et on note $f_1 = f_2$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$E_1 = E_2, \ F_1 = F_2 \ \text{ et } \ \forall x \in E_1, \ f_1(x) = f_2(x).$$

Exemple. Les quatre applications suivantes sont deux à deux distinctes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Définition.

Soient E et F deux ensembles, E_1 un sous-ensemble de E, $f : E \to F$ et $f_1 : E_1 \to F$. On suppose que :

$$\forall x \in E_1,\ f(x) = f_1(x)$$

Alors on dit que f_1 est **la restriction** de f à E_1 et que f est **un prolongement** de f_1 à E.
On notera $f_1 = f_{|E_1}$.

Attention.

La restriction d'une application est unique. Par contre, il n'y a pas qu'un seul prolongement possible pour une application. Par exemple, si on considère les applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

alors $f_{|\mathbb{R}_+} = h$ et $g_{|\mathbb{R}_+} = h$. Donc f et g sont deux prolongements possibles pour h.

3.2 Composition d'applications

Définition.

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle alors **application composée** l'application notée $g \circ f$ de E dans G définie par :

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Exemple. Considérons les fonctions f et g définies par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\ln(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right.$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Attention.

La composition est **non commutative**, c'est-à-dire que $f \circ g \neq g \circ f$ en général.

Propriété 4 (Associativité de la composition)

Sous réserve d'existence, on a les égalités :

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h.$$

On dit que la composition est **associative**.

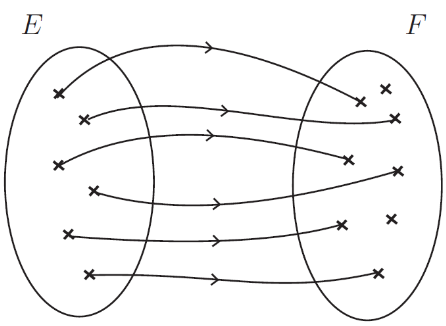
Exemple. Soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$ et $h(x) = e^x$.
Calculer $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ et constater qu'on a bien $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

3.3 Applications injectives

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
On dit que f est **injective** si chaque élément de F admet **au plus** un antécédent dans E par f.

Représentation sagittale. L'application suivante est injective :



Théorème 5 (Caractérisation des injections)

Une application $f : E \to F$ est **injective** si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2.$$

Méthode.
Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

Exemples. Déterminer si les applications suivantes sont injectives ou surjectives :

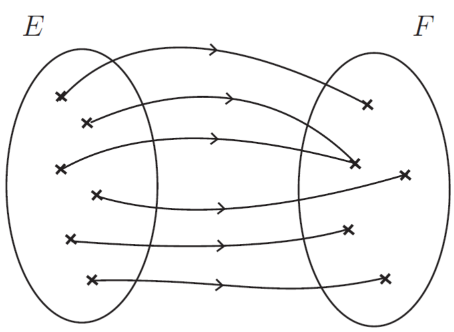
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right.$$

3.4 Applications surjectives

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
On dit que f est **surjective** si chaque élément de F admet **au moins** un antécédent dans E par f.

Représentation sagittale. L'application suivante est surjective :



Définition.

Soient f une application de E dans F et A une partie de E. L'**image directe** de A par f est l'ensemble noté $f(A)$ des images des éléments de A par f, c'est-à-dire :

$$f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}.$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Déterminer l'image directe $f(A)$ dans chacun des cas suivants :

(1) $A = [1, 3]$ (2) $A = [-2, 0]$ (3) $A = [-1, 3]$ (4) $A =]-4, 2]$

Théorème 6 (Caractérisation des surjections)

Une application $f : E \to F$ est **surjective** si et seulement si

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Autrement dit, f est **surjective** si et seulement si $f(E) = F$.

Méthode.
Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on se donne un élément quelconque de F et on montre qu'il a au moins un antécédent dans E.

Exemples. Déterminer si les applications suivantes sont surjectives :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n + 1 \end{array} \right.$$

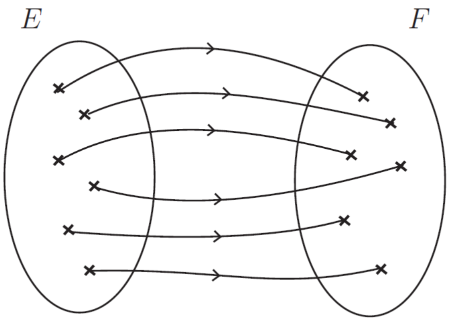
3.5 Bijection et bijection réciproque

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
On dit que f est **bijective** si chaque élément de F admet **un unique** antécédent dans E par f :

$$\forall y \in F,\ \exists ! x \in E,\ y = f(x).$$

Représentation sagittale. L'application suivante est bijective :



Théorème 7 (Première caractérisation d'une application bijective)

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors :

$$f \text{ est } \textbf{bijective} \Leftrightarrow f \text{ est } \textbf{injective} \text{ et } \textbf{surjective}$$

Méthode.
Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on pourra raisonner en deux étapes en montrant l'injectivité et la surjectivité de f.

Exemple. Considérons l'application f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x+y) \end{array} \right.$$

Montrer que l'application f est bijective.

Définition.

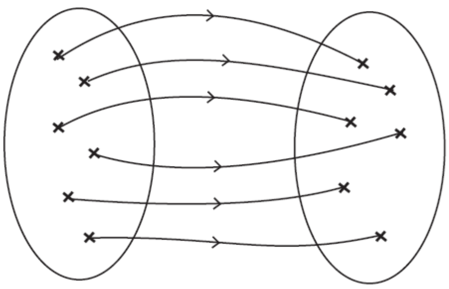
Si $f : E \to F$ est une **application bijective**, on peut définir la **bijection réciproque** f^{-1} de f par :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccl} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$$

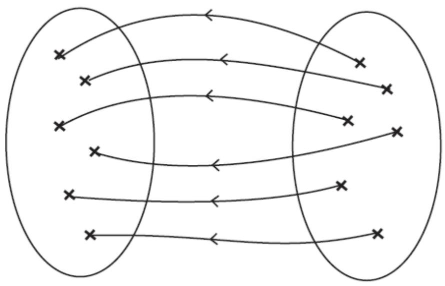
Autrement dit, pour tout $x \in E$ et $y \in F$,

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(y) = x.$$

Représentation sagittale. Voici les représentations d'une application bijective et de sa bijection réciproque :



Représentation de f



Représentation de f^{-1}

Notation. On appelle **application identité** d'un ensemble E l'application notée Id_E définie par :

$$Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

En particulier, si $f : E \to F$ est une application, alors :

$$f \circ Id_E = f \quad \text{et} \quad Id_F \circ f = f.$$

Théorème 8 (Seconde caractérisation d'une application bijective)

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est **bijective** de E dans F si et seulement si il existe une application g de F dans E telle que :

$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F.$$

L'application g est alors unique et c'est la **bijection réciproque** de f.

Remarques. On a vu dans un chapitre précédent que :

- La fonction logarithme est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ appelée fonction exponentielle. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) = x.$$

- Les fonctions carrée $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et racine carrée $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x.$$

Exemple. On considère toujours l'application f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x + y) \end{array} \right.$$

1. Donner l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

2. Calculer $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$. Les résultats obtenus sont-ils cohérents ?

Propriété 9 (Composée d'applications bijectives)

Si f est une **bijection** de E dans F et si g est une **bijection** de F dans G, alors $g \circ f$ est une **bijection** de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$