Chapitre 8

Continuité

Compétences attendues.

- ✓ Justifier la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle.
- ✓ Étudier si une fonction est prolongeable par continuité et, si oui, donner le prolongement.
- ✓ Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.
- ✓ Démontrer qu'une fonction est bijective à l'aide du théorème de la bijection.
- ✓ En déduire les propriétés de la bijection réciproque (continuité, sens de variation, limites).
- ✓ Étudier les suites (u_n) définies implicitement par une relation du type $f_n(u_n) = 0$ ou $f(u_n) = v_n$.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Continuité

1.1 Continuité en un point

Définition de la continuité en un point

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel $x_0 \in \mathcal{D}_f$.
On dit que f est **continue** en x_0 si f admet une limite finie en x_0 égale à $f(x_0)$. Autrement dit :

$$f \text{ est } \textbf{continue} \text{ en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue** en x_0.

Méthode.
Pour montrer que f est continue en x_0, il suffit de montrer que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple. Étudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes :

- $x_0 = 1$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

- $x_0 = 2$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x \in [-2, 2[\cup]2, +\infty[, \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 2. \end{cases}$

- $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Continuité à gauche, à droite

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

- On dit que f est **continue à gauche** en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est **continue à droite** en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Propriété 1 (Continuité à gauche et à droite)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Alors :

f est **continue à gauche et à droite** en x_0 $\Leftrightarrow$ f est **continue** en x_0

Méthode.

L'étude de la continuité à gauche ou à droite de f en un point x_0 est pertinente si on est dans une des situations suivantes :

- $f(x)$ s'exprime différemment à gauche et à droite de x_0.
- Il y a un dénominateur dans l'expression de $f(x)$ qui s'annule et change de signe en x_0.

Exemples. Étudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes :

- $x_0 = 0$ et $f(x) = \begin{cases} xe^{1/x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- $x_0 = 1$ et $g(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor + 2x}{1 + \lfloor x \rfloor}$.

- $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1.2 Continuité sur un intervalle

Définition.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **continue** sur I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$.

Théorème 2 (Fonctions usuelles et continuité)

(1) Les fonctions **polynomiales**, les fonctions **rationnelles**, la fonction **valeur absolue**, les fonctions **logarithme** et **exponentielle**, les fonctions **puissances** (en particulier la fonction **racine carrée**) sont **continues** là où elles sont définies.

(2) La fonction **partie entière** est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle est constante égale à n sur cet intervalle. Par contre, elle est discontinue en tout point $n \in \mathbb{Z}$ car :

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

L'ensemble des fonctions continues est stable par somme, par produit par un scalaire, par produit, par quotient et par composition. Plus précisément :

Théorème 3 (Opérations sur les fonctions continues)

(1) Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I et λ un réel quelconque. Alors :

- $f+g$, λf et $f.g$ sont **continues** sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est **continue** sur I.

(2) Soient f une fonction **continue** sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J (c'est-à-dire $f(I) \subset J$) et g une fonction **continue** sur J. Alors $g \circ f$ est définie et **continue** sur I.

Exemple. Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1.3 Prolongement par continuité

Définition.

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$, **mais pas en** x_0. Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
Alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ \ell & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

est continue en x_0 et elle sera appelée **le prolongement par continuité** de f en x_0.

Remarque. Souvent, on prolonge f par continuité en x_0 en posant simplement $f(x_0) = \ell$ (on confond alors les fonctions f et $\tilde{f}$).

Exemples. Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes :

- $f(x) = x\ln(x)$

- $g(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

- $h(x) = (1+x)^x$

2 Image d'un intervalle par une fonction continue

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4 (des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et qui **change de signe** sur cet intervalle (c'est-à-dire que $f(a).f(b) \leq 0$). Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire que f **s'annule au moins une fois sur** $[a,b]$.

Exemples.

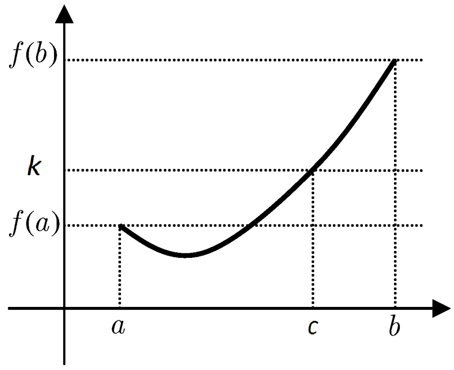
- Montrer que l'équation $e^x = 2 - x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

- Montrer que l'équation $\dfrac{2x^3 + x - 1}{3x^2 + 1} = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

On peut exprimer le théorème des valeurs intermédiaires d'une seconde façon :

Propriété 5 (Image continue d'un intervalle)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
Ainsi, **l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle**.



Exemple. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

1. Étudier les variations de f.

2. Déterminer $f(]-1,1])$, $f([0,2])$, $f(]-1,+\infty[)$ et $f(\mathbb{R})$.

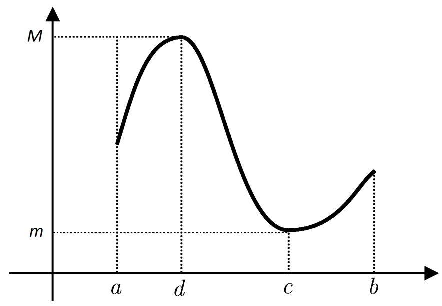
Remarque. Comme on le voit sur l'exemple précédent, l'image par une fonction continue d'un intervalle n'est pas forcément un intervalle de même nature. C'est par contre le cas lorsque l'intervalle est un **segment**, c'est-à-dire de la forme $[a,b]$:

Propriété 6 (Image continue d'un segment)

Si f est continue sur $[a,b]$, on a :

$$f([a,b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x),\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\right].$$

Ainsi, **l'image d'un segment par une fonction continue est un segment**.



Remarque. En particulier, si une fonction f est **continue sur un segment**, alors f y possède un **maximum** et un **minimum**.

2.2 Théorème de la bijection

Rappelons la définition d'une fonction bijective :

Définition.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans J. La fonction f est une **bijection** de I dans J lorsque tout élément $y \in J$ possède **un unique antécédent** $x \in I$ par f. Autrement dit :

$$\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ y = f(x).$$

Comme on l'a déjà vu dans les chapitres précédents, le théorème suivant permet de montrer qu'une fonction est bijective :

Théorème 7 (de la bijection)

Soit f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une **bijection** de I dans J.

Remarque. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$, et k un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.

- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution dans $[a,b]$ à l'équation $f(x) = k$. Mais nous n'avons pas plus d'information sur le nombre exact de solutions.
- Dans le cas où f est strictement monotone, on déduit du théorème précédent que f réalise une bijection de $[a,b]$ dans $f([a,b])$ (égal à $[f(a), f(b)]$ si f est strictement croissante et à $[f(b), f(a)]$ si f est strictement décroissante). On peut alors préciser le théorème des valeurs intermédiaires : il existe une unique solution $c \in [a,b]$ à l'équation $f(c) = k$ (où c est l'unique antécédent de k par f).

Définition.

Soit f une bijection d'un intervalle I dans $J = f(I)$.
On appelle alors **bijection réciproque** de f la fonction notée f^{-1} définie par :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} J & \to & I \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$$

Ainsi, on a pour tout $x \in I$ et $y \in J$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Propriété 8 (Bijection et bijection réciproque)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, **continue** et **strictement monotone**. Alors f réalise une **bijection** de I dans $J = f(I)$, et sa **bijection réciproque** vérifie :

(1) Pour tout $x \in I$ et $y \in J$,

$$f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

En particulier, f^{-1} réalise une **bijection** de J sur I.

(2) Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la première bissectrice du plan d'équation** $y = x$.

(3) f^{-1} est elle-même **continue** sur J, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.

(4) Si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to b} f^{-1}(x) = a.$$

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2}$.

1. Étudier les variations de f.

2. Montrer que f réalise une bijection de son ensemble de définition sur un intervalle J à préciser.

3. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Préciser les variations de f^{-1} sur J ainsi que ses limites aux bornes de J.

4. Pour tout $y \in J$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x. En déduire l'expression de f^{-1}.

5. Retrouver les résultats de la question 3 en utilisant l'expression de f^{-1}.

6. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f et de f^{-1}.