Chapitre 9

Coefficients binomiaux

Compétences attendues.

- ✓ Déterminer le cardinal d'un ensemble fini à l'aide des opérations sur les ensembles.
- ✓ Interpréter combinatoirement $n!$ et $\binom{n}{p}$.
- ✓ Connaitre les relations sur les coefficients binomiaux et en déduire la construction du triangle de Pascal.
- ✓ Connaître la **formule explicite des coefficients binomiaux** et la **formule du binôme de Newton**.
- ✓ Développer une expression à l'aide de la formule du binôme de Newton.
- ✓ Simplifier une somme à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en première année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Ensembles finis

1.1 Généralités

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que $[\![1, n]\!]$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 à n.

Définition.

On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

- E est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son **cardinal** est nul.
- Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E, auquel cas on dit que son **cardinal** est n.

On note $\text{card}(E)$ le cardinal d'un ensemble fini E

Remarques.

1. Le cardinal d'un ensemble fini E est égale au nombre d'éléments appartenant à E. En effet, si $\text{card}(E) = n$ et si φ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E, on a : $E = \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)\}$.
2. Deux ensembles finis ont même cardinal si et seulement si il existe une bijection de l'un de ces ensembles dans l'autre.

Propriété 1 (Sous-ensemble d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini. Alors :

(1) Toute partie F de E est finie, et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.

(2) Si $F \subset E$ et si $\text{card}(F) = \text{card}(E)$, alors $F = E$.

Remarque. Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cap F$ est un ensemble fini (car c'est une partie de E et de F qui sont des ensembles finis) et on a :

$$\text{card}(E \cap F) \leq \text{card}(E) \quad \text{et} \quad \text{card}(E \cap F) \leq \text{card}(F).$$

1.2 Cardinal et opérations sur les ensembles

Propriété 2 (Cardinal et opérations sur les ensembles)

(1) **Cardinal du complémentaire :** Si E est un ensemble fini et F est une partie de E, alors le complémentaire $\overline{F}$ de F dans E est un ensemble fini et on a :

$$\text{card}(\overline{F}) = \text{card}(E) - \text{card}(F).$$

(2) **Cardinal d'une réunion :** Si E, F et G sont trois ensembles finis, alors

- $E \cup F$ est un ensemble fini et on a :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F).$$

- $E \cup F \cup G$ est un ensemble fini et on a :

$$\begin{aligned} \text{card}(E \cup F \cup G) &= (\text{card}(E) + \text{card}(F) + \text{card}(G)) \\ &\quad -(\text{card}(E \cap F) + \text{card}(E \cap G) + \text{card}(F \cap G)) \\ &\quad +\text{card}(E \cap F \cap G). \end{aligned}$$

(3) **Cardinal d'un produit cartésien :** Si E et F sont deux ensembles finis, alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et on a :

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

Exemple.

- Un lycée comporte deux classes préparatoires ECE. 55 élèves ont pour langues anglais et allemand, 60 élèves ont pour langues anglais et espagnol et 15 élèves étudient les 3 langues. Combien y-a-t-il d'élèves en tout ?

- Jean-Louis a oublié le code à trois chiffres de l'antivol de son vélo. Il sait qu'il y a au moins un chiffre supérieur ou égal à 3. Combien lui faudra-t-il essayer de codes dans le pire des cas ?

1.3 Permutation d'un ensemble fini

Définition.

Une **permutation** d'un ensemble fini E est une bijection de E dans E.

Rappel. Pour tout entier naturel n, on appelle **factorielle** de n, et on note $n!$, l'entier naturel défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 \quad \text{si } n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n \quad \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Propriété 3 (Nombre de permutations d'un ensemble fini)

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble fini E à n éléments.

Méthode.
$n!$ correspond au nombre de façons de ranger n objets distincts dans un certain ordre.

Exemple.

1. 8000 personnes ont participé aux 10 km du Run In Reims cette année. Combien y a-t-il de résultats possibles à cette course ?

2. Lors de la soirée de Noël des prépas ECE, 30 filles et 30 garçons sont sur la piste de danse lorsque le DJ décide de passer un slow. Combien y-a-t-il de possibilités pour former 30 couples de danse ?

2 Parties d'un ensemble fini

2.1 Coefficients binomiaux

Définition.

On appelle **coefficient binomial** d'indices k et n le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments.
Ce nombre est noté $\binom{n}{k}$ et il se lit "k parmi n".

Exemple.

1. Déterminer l'ensemble des parties de E lorsque $E = \{a, b\}$ et lorsque $E = \{a, b, c\}$.

2. En déduire les valeurs de $\binom{2}{k}$ et de $\binom{3}{k}$ en fonction de k.

Remarques.

- $\binom{n}{0} = 1$, car il y a une seule partie de 0 élément dans un ensemble de n éléments, la partie vide.
- $\binom{n}{n} = 1$, car il y a une seule partie de n éléments dans un ensemble de n éléments, la partie égale à l'ensemble tout entier.
- $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, car il n'y a aucune partie d'un ensemble de n éléments qui contient plus de n éléments.

Propriété 4 (Relations sur les coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel non nul.

(1) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie des coefficients binomiaux).

(2) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (formule du triangle de Pascal).

Remarque. Cette dernière relation nous permet de construire le **triangle de Pascal**, qui nous donne une construction rapide des premiers coefficients binomiaux :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$\dots$	k	$k+1$	$\dots$	n	$n+1$
$n=0$	1										
$n=1$	1	1									
$n=2$	1	2	1								
$n=3$	1	3	3	1							
$n=4$	1	4	6	4	1						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$									
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$		$\dots$		$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	$\dots$	1	
$n+1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$		$\dots$			$\binom{n+1}{k+1}$		$\dots$	1

Méthode.

$\displaystyle\binom{n}{k}$ correspond au nombre de façons de choisir k objets parmi n objets sans répétition et sans ordre.

Exemple. Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. De combien de façons différentes peut-on tirer 3 boules dans les cas suivants :

1. Les 3 boules tirées sont blanches.

2. Au moins l'une des boules tirées est noire.

3. Deux des boules tirées sont noires.

Théorème 5 (Formule explicite des coefficients binomiaux)

Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple. Simplifier les expressions suivantes :

- $\dfrac{2\binom{n+1}{2}}{n(n+1)} =$

- $\dfrac{n}{4}\dbinom{n-1}{3} + \dbinom{n}{n-5} =$

- $\dfrac{n-2}{n+1} \times \dfrac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{3}} =$

2.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 6 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Méthode.
En utilisant la formule du binôme de Newton, il est ainsi possible de développer n'importe quelle puissance d'une somme de deux nombres réels.

Exemple.

1. En appliquant la formule du binôme de Newton, retrouver les identités remarquables suivantes :
   - $(a+b)^2 =$
   - $(a+b)^3 =$
2. Développer les expressions suivantes :
   - $(3-\sqrt{5})^4 =$
   - $(1+\sqrt{2})^5 =$

Méthode.
La formule du binôme de Newton permet également de calculer des sommes dont le terme général contient un coefficient binomial.

Exemple. Calculer les sommes suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^{n-k}} =$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k =$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{3^k}{k} =$

Propriété 7 (Cardinal des parties d'un ensemble fini)

Si E est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est également fini et on a :

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}.$$

Preuve.

□

Exemple. Vérifier cette formule lorsque $E = \{a, b\}$ et lorsque $E = \{a, b, c\}$.

Remarque. Que donne la formule du binôme de Newton pour $a = -1$ et $b = 1$? En déduire que dans un ensemble à n éléments il y a autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair.