TD1

Propriétés des nombres réels

Nombres et calculs

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{3}{2} \times \left(\frac{11}{4} - \frac{12}{5}\right) \qquad B = \frac{\frac{4}{3} - 7}{\frac{-7}{9} - 2} \qquad C = \frac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$$

$$D = \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{7}{8} - \left(\frac{3}{4} - 2\right)\right) \qquad E = \frac{\frac{25}{16} \times \frac{24}{15} + 1}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \qquad F = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{24}\right) \times \frac{12}{49}$$

Exercice 2

Calculer les expressions suivantes :

$$A = \frac{21 \times 10^9 \times 25 \times 10^7}{1200 \times (10^{-3})^2} \qquad B = (-2)^3 \times 5 + 3^2 \times 2^4 - 5 \times 2^2$$

$$C = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (3^2 \times 2)^4 - 5 \times 2^2 \qquad D = \frac{(5^2 \times 3^3)^2 \times 2^{-2} \times (-3)^{-2}}{(3^2 \times 2^4)^3 \times 2^{-3} \times 5}$$

$$E = \frac{(3 \times 10 - 2)^3 \times (5^2 \times 10^4)^2}{6 \times 10^3 \times 25 \times 10^7} \qquad F = \frac{25 \times (10^2)^{-5} \times 121}{11 \times 75 \times 10^{-9}}$$

Exercice 3

1. Calculer $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$. Que peut-on remarquer ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A_n = (-1)^{2n} \qquad B_n = (-1)^{2n+1}$$

$$C_n = (-1)^{n-1} + (-1)^n + (-1)^{n+2} \qquad D_n = \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}}$$

$$E_n = 2(-1)^{1-n} + (-1)^{-n} - (-1)^{n-1} \qquad F_n = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+2}$$

$$G_n = 2(-1)^n(-1)^{n-1} + (-1)^{-n}(-1)^{-n+2} \qquad H_n = \frac{(-1)^n + 2(-1)^{2n} + 3(-1)^{3n}}{(-1)^n \times (-1)^{2n} \times (-1)^{3n}}$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A_n = -8\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} \qquad B_n = 6^n\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$$

$$C_n = 8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2} \qquad D_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times 9$$

$$E_n = \frac{10^{n+1} - 9 \times 10^n - 10^{n+2}}{20 \times 10^{n-2} + 8 \times 10^{n-1} - 10^{n+1}} \qquad F_n = \frac{(9^{n+1} - 9^n)^2}{(3^{n+1} - 3^n)^4}$$

Exercice 5
Calculer les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{27} - \sqrt{75} + 4\sqrt{12} \qquad B = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54} \qquad C = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$D = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} \qquad E = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \qquad F = \frac{1+2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$$

$$G = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \qquad H = \left(\sqrt{7-\sqrt{6}} + \sqrt{7+\sqrt{6}}\right)^2 \qquad I = \frac{3+5\sqrt{10}}{3-5\sqrt{10}}$$

Exercice 6
Développer puis réduire si possible les expressions suivantes :

$$A = (2x-3)^2 \qquad B = (4-7x)(4+7x) \qquad C = 3(x^2+2) - (x-3)(x-7)$$

$$D = (x^2+2x-3)^2 \qquad E = (2-3x)^3 \qquad F = (x+5)^2 - 2(3x-2)^2$$

$$G = (x^2-x+3)^3 \qquad H = (x^2-3)(2x+1)^2 \qquad I = (2x^2+x-1)^2 - 2(x-3)^3$$

Exercice 7
Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 3(x-2)^2 - (4x-7)(x-2) \qquad B = 4(x^2-4x+4) + 3(2-x) \qquad C = x^4 - 25$$

$$D = (2x-6)^2 + (x-3) \qquad E = (2x-1)^3 - (2x-1) \qquad F = (x+2)^2 - 49(5-x)^2$$

$$G = 16x^2 - 8x + 1 \qquad H = \frac{1}{25} - (x+3)^2 \qquad I = 27 - \frac{1}{3}(2x+1)^2$$

$$J = \frac{x^2-1}{3} + \frac{1+x}{2} \qquad K = (x+2)(6x-3) - (1-2x)^2 \qquad L = (5+2x)^2 - 4x - 10$$

Inégalités et valeur absolue

Exercice 8

1. Sachant que $2 \leq x \leq 5$, déterminer un encadrement de :

$$(i)\ 2x-3, \qquad (ii)\ 6-x, \qquad (iii)\ \frac{2x-3}{6-x}.$$

2. Sachant que $-2 \leq x \leq 3$ et $-7 \leq y \leq -5$, déterminer un encadrement de :

$$(i)\ x^2, \qquad (ii)\ y^2, \qquad (iii)\ y^2-x^2, \qquad (iv)\ \frac{x^2}{y^2-x^2}.$$

Exercice 9

1. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geq \dfrac{1-x}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $x \leq y$, $x \leq \dfrac{2x+y}{3} \leq y$.
3. Montrer que, pour tout $x < -2$, $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x} < \dfrac{3}{x}$
4. Montrer que pour tout $x \geq \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{3x-1}{(3x+1)^2} \leq \dfrac{3x-1}{4}$.
5. Montrer que, pour tout $0 < x < y$, $0 < \dfrac{2xy}{x+y} < \dfrac{x+y}{2}$.

Exercice 10

1. Écrire sans le symbole valeur absolue les nombres suivants :

$$a = |-3|\,,\quad b = \left|10^{-3}\right|,\quad c = \left|5 - \frac{131}{3}\right|,\quad d = -\left|-23\right| - |23-31|\,,\quad e = |2(5-12)| + \left|1 - \frac{3}{2}\right|.$$

2. Caractériser à l'aide de la notation valeur absolue l'ensemble des réels x satisfaisant à la condition indiquée :

$$(i)\ \ x \in [2,12],\qquad (ii)\ \ x \in]-1,5[,\qquad (iii)\ \ x \in]-\infty,4[\ \text{ ou }\ x \in]6,+\infty[.$$

3. Écrire sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs de x, les quantités suivantes :

$$A(x) = |2x+5|\,,\qquad B(x) = 2x - |3-6x|\,,\qquad C(x) = |3x-2| - 2\,|5-x|\,.$$

Polynômes des premier et second degrés

Exercice 11

1. Déterminer les racines des polynômes suivants :

$$P_1(x) = -3x+6,\quad P_2(x) = 2x^2+4x+2,\quad P_3(x) = -3x^2+12x+6,\quad P_4(x) = 2x^2-x+2.$$

2. Déterminer le signe des polynômes suivants :

$$P_1(x) = -2x-3,\quad P_2(x) = 2x^2-3x+2,\quad P_3(x) = 8x^2+8x+2,\quad P_4(x) = -x^2-3x+10.$$

3. On considère le polynôme $P(x) = 3x^2+12x-9$.

   Construire la courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de P dans un repère orthonormé.

4. La courbe représentative $\mathcal{C}_Q$ d'une fonction polynôme Q du second degré admet pour sommet le point $S(1,2)$ et elle passe par les points $A(-1,0)$ et $B(3,0)$.

   Donner une expression du polynôme Q et tracer $\mathcal{C}_Q$.

Exercice 12

On considère trois points $A(-2,6)$, $B(2,1)$ et $C(6,-2)$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression du polynôme du second degré P dont la parabole passe par ces trois points.

2. Déterminer les coordonnées de son sommet, de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées et de ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Équations et inéquations

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \sqrt{5}(x+1)+2 = 4\sqrt{5}-2x \qquad (E_2) : 5x-(x-4) = 4(x+2)$$

$$(E_3) : 3(x-3) - \frac{1}{2}x = 5\left(\frac{1}{2}x - \frac{9}{5}\right) \qquad (E_4) : (x^2-4x-2)(-2x^2+3x+4) = 0$$

$$(E_5) : (x+1)^2 = (x-1)^2 \qquad (E_6) : (4x^2-1)^2 = (2x-1)^2$$

$$(E_7) : \frac{x^2-4}{x^2+2x} = 0 \qquad (E_8) : \frac{2x-5}{6-x} = 4$$

$$(E_9) : \frac{x+2}{x+1} = \frac{5x}{x+2} - 4 \qquad (E_{10}) : \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$(E_{11}) : \frac{x}{x-3} = \frac{x+2}{(x-3)^2} - 1 \qquad (E_{12}) : \frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^2-2x} = \frac{3x+2}{x^2+x}$$

Exercice 14

1. Résoudre l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.

2. En déduire la résolution des équations $x^4 + x^2 - 6 = 0$ et $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \frac{x-3}{4} + \frac{x}{6} < \frac{2x-3}{3} \qquad (I_2) : 3x - \frac{x-1}{3} \geq \frac{1}{3} - x$$

$$(I_3) : \frac{x-3}{2} > 2x - \frac{3x+1}{2} \qquad (I_4) : (2x+3)(3x-5)(7-x) < 0$$

$$(I_5) : 2x(x+1) \geq (1-3x)(x+1) \qquad (I_6) : x^3 - x \leq 2x^2 - 2$$

$$(I_7) : \frac{(x-1)^2(x+5)}{x-4} \geq 0 \qquad (I_8) : \frac{x+3}{x^2-1} \geq \frac{3}{x-1}$$

$$(I_9) : \frac{x}{x-2} - 2 \geq \frac{-x+3}{x+1} \qquad (I_{10}) : \frac{x-1}{x-3} + \frac{1-x}{3+x} \leq \frac{x^2-2x+1}{x^2-9}$$

Exercice 16

Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$(E) : |2x+3| - |2-x| = -3.$$

1. Écrire $|2x+3|$ sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs de x.

2. Écrire $|2-x|$ sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs de x.

3. Résoudre l'équation (E) dans chacun des cas suivants :

   - si $x \in]-\infty, -\frac{3}{2}]$.
   - si $x \in [-\frac{3}{2}, 2]$.
   - si $x \in [2, +\infty[$.

4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : |x| = -1 \qquad (E_2) : |x-3| = \frac{5}{3} \qquad (E_3) : |x+2| = \frac{1}{2}$$

$$(E_4) : |24x-9| = 9 - 24x \qquad (E_5) : |x+1| - |2x+1| = 0 \qquad (E_6) : |x+1| + |2x+1| = 0$$

$$(E_7) : \sqrt{4x^2+28x+49} = 4 \qquad (E_8) : \sqrt{x^2+9} = 5 \qquad (E_9) : x - 2 = \sqrt{x}$$

Exercice 18

Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'inéquation suivante :

$$(I) : |2x-1| \leq |x+2|.$$

1. Écrire $|2x-1|$ sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs de x.

2. Écrire $|x+2|$ sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs de x.

3. Résoudre l'inéquation (I) dans chacun des cas suivants :

   - si $x \in]-\infty, -2]$.

- si $x \in [-2, \frac{1}{2}]$.
- si $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$.

4. En déduire les solutions de (I).

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : |x+3| - 2|x-1| > 2, \qquad (I_2) : |x+5| < |x+3|, \qquad (I_3) : |2x+1| \leq |x+2| + 2x.$$

Sommes et produits

Exercice 20

1. Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$ et $\displaystyle\sum_{j=3}^{8} \frac{j}{3^j}$.
2. Soit $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:
   (a) $2^5 + 3^5 + 4^5 + ... + n^5$.
   (b) $\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^4}{4} + \dfrac{a^6}{6} + \ldots + \dfrac{a^{28}}{28}$.
   (c) $\dfrac{1}{1} - \dfrac{2}{2} + \dfrac{2^2}{3} - \dfrac{2^3}{4} + \ldots - \dfrac{2^{2015}}{2016}$.

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(5k+2)$, (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(6k^2-2k+1)$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^3-5k+1)$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)$.
2. (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k+3^{2k})$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-6\times 2^k)$, (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5^{k+3}}{7^{k+2}}\right)$.
3. (a) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}(k-n)$, (b) $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n}k^2$, (c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2}k$, (d) $\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n}\frac{2^k}{3^{2k}}$.
4. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}2^{2k-1}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k3^{n-k}$, (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^{n-k}$.

Exercice 22

Jean-Louis s'ennuie et il décide d'additionner le numéro de toutes les pages d'un annuaire. Il obtient finalement 13366. Combien y a-t-il de pages dans cet annuaire ?

On pourra utiliser que $327^2 = 106929$.

Exercice 23

On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}1$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^2-k^2\right]$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]$.

1. Calculer A_n.

2. (a) Montrer que $S_n = (n+1)^2$.
   (b) En développant le crochet, exprimer S_n en fonction de B_n et de n.
   (c) En déduire l'expression de B_n en fonction de n.
3. (a) Calculer T_n.
   (b) En développant le crochet, exprimer T_n en fonction de B_n, C_n et de n.
   (c) En déduire l'expression de C_n en fonction de n.

Exercice 24

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2. En déduire une expression de S_n en fonction de n.

Exercice 25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.
2. En déduire une expression de S_n en fonction de n.

Exercice 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+2}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{3k+2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2}.$$
2. En déduire une expression de S_n en fonction de n.

Exercice 27

Simplifier les produits suivants :

$$(a)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}, \qquad (b)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{3^{3k-1}}, \qquad (c)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2} \qquad (d)\ \prod_{k=n}^{2n} 5^k.$$

Exercice 28

Calculer les produits suivants (où $n \geq 2$) :

$$(a)\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \qquad (b)\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \qquad (c)\ \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{k+1}$$

Exercice 29

1. Calculer les expressions suivantes :

$$(a)\ \frac{15!}{12!}, \qquad (b)\ \frac{600!}{598!}, \qquad (c)\ \frac{10!}{2!\times 3!\times 5!}, \qquad (d)\ \frac{300!}{3!\times 297!}.$$

2. Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a)\ n!\times(n+1), \quad (b)\ \frac{(n+1)!}{n+1}, \quad (c)\ \frac{(n+2)!}{n!}, \quad (d)\ \frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n-1)!}, \quad (e)\ \frac{(2n-1)!}{(2n+2)!}.$$

Exercice 30

Démontrer les égalités suivantes (où $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$(1)\ \prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n n!, \quad (2)\ \prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)=\frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad (3)\ \prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1}=2n+1, \quad (4)\ \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k}=\frac{(n+1)!}{2n}.$$